NOTIONS

DE

MATHÉMATIQUES

PAR

A. SAINTE-LAGUË

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES
AU LYCÉE DE BESANÇON

Avec Préface de

G. KŒNIGS

PROFESSEUR DE MÉCANIQUE PHYSIQUE ET EXPÉRIMENTALE
A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

PARIS (V^e^)

LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE A. HERMANN & FILS, ÉDITEURS

Libraires de S. M. le Roi de Suède

6, Rue de la Sorbonne, 6

—

1913

PREFACE

L'esprit dans lequel a été conçu le présent ouvrage, la manière dont son exécution a été conduite, plairont à ceux qui ont le souci de voir la mathématique continuer à servir de base au développement de nos connaissances. Ce développement est tel aujourd'hui, surtout dans le domaine de la mécanique et de la physique, il excite tellement les aspirations et les ambitions de notre moderne jeunesse que l'on aurait grand tort de ne point se préoccuper de constituer un enseignement des mathématiques plus adapté aux exigences pratiques.

Disons tout de suite que ce qui doit caractériser un tel enseignement ce sont moins ses programmes que sa méthode. Un enseignement abstrait, dogmatique, qui ne montre les choses que sous leurs formes logiques est pratiquement inopérant. Au contraire, l'éveil de l'intuition, l'examen direct des choses, le recours occasionnel à l'expérience sont éminemment propres à préparer les esprits à traiter mathématiquement les contingences, sans exclure le souci d'une correcte application du raisonnement.

Un enseignement de ce genre est devenu nécessaire; il doit être l'œuvre de nos meilleurs maîtres, car leur savoir et leur expérience les garantiront mieux que d'autres des solécismes mathématiques, de l'à-peu près et de l'imprécision. Car la précision est au moins aussi nécessaire à

celui qui veut faire aboutir une formule à un résultat numérique qu'à celui qui se contente d'y voir un résultat logique.

Nous devons donc louer hautement M. Sainte-Laguë d'avoir entrepris cette tâche. Sous le nom de Mathématiques Générales on a constitué en France depuis quelques années, un programme d'enseignement qui, pratiqué bien entendu dans le sens que nous venons d'indiquer, peut et doit rendre les plus grands services. Mais, pour beaucoup, les lacunes de leur savoir concernent des matières plus élémentaires que celles de cet enseignement, déjà relevé. Le présent livre leur offrira le moyen de combler ces lacunes, de consolider leurs connaissances élémentaires et les initiera à des formes de pensées, à des modes de conception qui les rapprocheront eux-mêmes des applications.

Nous nous reprocherions de ne pas attirer spécialement l'attention sur les exercices dont certains sont très originalement posés ; leur choix judicieux est de nature à concourir le plus utilement au but général de l'ouvrage.

G. Kœnigs.

AVERTISSEMENT

Des renvois en caractères gras permettent de se reporter aux paragraphes qui se rattachent étroitement à la question considérée. Les énoncés importants sont en italiques.

Après chaque chapitre, on a donné la liste de ceux des exercices de la fin du volume qui concernent le chapitre.

Enfin le lecteur trouvera, à partir de la page 471, diverses tables numériques, un formulaire des résultats les plus essentiels et un index alphabétique renvoyant pour chaque mot au paragraphe correspondant du texte.

A. S-L.

Douai 1909-1912.

NOTIONS DE MATHÉMATIQUES

ARITHMÉTIQUE

CHAPITRE PREMIER

NOMBRES ENTIERS

1. Numération. — L'arithmétique est une science relativement moderne, car, jusqu'au XIIIe siècle, on ne possédait aucune méthode rationnelle pour représenter les nombres. Ce n'est guère qu'à cette époque que l'on fut en possession des dix caractères qui servent aujourd'hui. Cette découverte constitue une des acquisitions les plus précieuses de l'humanité et l'on peut dire que l'histoire de la science présente peu de faits plus intéressants que les diverses tentatives essayées successivement pour représenter les nombres avant l'invention du seul procédé vraiment rationnel. Il n'y a guère que l'invention de l'alphabet qui puisse être considérée comme une plus grande découverte au point de vue de la facilité des relations entre les hommes.

Ce qui fait la puissance de notre système de numération, ce n'est pas l'emploi de neuf caractères pour représenter les nombres de un à neuf, mais la convention que *tout chiffre placé à la gauche d'un autre représente des unités dix fois plus fortes*, et l'emploi du *zéro* pour tenir la place des ordres manquants. Le lecteur sait avec quelle simplicité cette notation permet de faire des additions, soustractions, multiplications ou divisions de nombres entiers.

2. — Il ne faudrait pas croire cependant que ces avantages soient particuliers à ce système de base 10. On pourrait par exemple écrire tous les nombres dans le système à base 12 ou système *duodécimal*, dans lequel les unités du deuxième ordre sont des douzaines, du troisième des douzaines de douzaines, etc... Il faut deux nouveaux caractères α et β pour désigner les nombres 10 et 11, et l'on a pour les premiers nombres le tableau suivant de concordance entre les deux systèmes :

Système décimal :	1	2	3	. .	9	10	11	12	13	14	. .
Système duodécimal :	1	2	3	. .	9	α	β	10	11	12	. .

.	23	24	25	. .	36	. . .	143	144	145	. . . .
.	1β	20	21	. .	30	. . .	ββ	100	101	. . . .

Le passage de l'un de ces systèmes à l'autre est aisé.

Le nombre duodécimal $\alpha 9 \beta$ vaut en numération décimale : $(\alpha.12.12) + (9.12) + \beta = 1440 + 108 + 11 = 1559$. Inversement 1559 en numération décimale donne par des divisions successives : $1559 = 129.12 + 11 = (10.12 + 9)\,12 + 11$ ou en numération duodécimale : $\alpha 9 \beta$.

Il existe bien d'autres systèmes de numération qui ont été proposés pour des raisons diverses, par exemple les systèmes à base 64, à base 24, à base 8 (ou *octaval*), à base 2 (ou *binaire*), etc.. Dans ce dernier les seuls chiffres employés sont 1 et 0 :

Système décimal :	1	2	3	4	5	6	8	8	9 .....
Système binaire :	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001 .....

16	17 ..	32 ..	64 ..	128 .....
10000	10001 ..	100000 ..	1000000 ..	10000000 .....

Si la base d'un système de numération est supérieure à 10, les résultats de calcul qu'il faut retenir de tête (sommes ou produits de deux nombres de un chiffre) sont beaucoup plus nombreux

que dans le système décimal, mais par contre les nombres sont plus vite écrits et les opérations plus rapides. Au contraire si la base est inférieure à 10, il y a peu de résultats à retenir de tête, mais les opérations sont beaucoup plus longues. On a par exemple ci-contre la multiplication en système binaire de 57.14 = 798 (¹).

$$\begin{array}{r} 111\,001 \\ 1\,110 \\ \hline 1\,110\,010 \\ 11\,1001 \\ 111\,001 \\ \hline 1\,100\,011\,110 \end{array}$$

3. Principes relatifs à l'addition et à la soustraction. — Nous ne croyons pas utile de rappeler les règles suivant lesquelles on effectue les quatre opérations fondamentales de l'arithmétique (²) : addition, soustraction, multiplication, division, ni la démonstration de ces règles, mais nous rappellerons quelques principes qui leur sont relatifs. Nous donnerons les démonstrations de quelques-uns d'entre eux et à ce sujet nous ferons une remarque générale : il y a des vérités qui nous paraissent évidentes par l'usage habituel que nous en faisons. Il est important de comprendre qu'elles ont néanmoins besoin d'être démontrées. Il paraît au premier abord tout à fait oiseux de démontrer que $3 \times 4 = 4 \times 3$; cette propriété peut sembler évidente, puisque 3×4 font 12 aussi bien que 4×3. Mais raisonner ainsi, c'est confondre une vérification avec une démonstration. Si nous remplaçons 3 et 4 par des nombres de vingt chiffres, nous ne pourrons plus faire la vérification sans de pénibles calculs, et rien ne nous dit que la vérification faite sur deux nombres particuliers s'appliquera à tous les autres. Ce qui caractérise une démonstration, c'est que le raisonnement, fait sur deux nombres particuliers, s'applique sans y rien changer

---

(¹) Le lecteur familiarisé avec les théories de la divisibilité (**14**) verra en comparant les systèmes duodécimal et décimal que dans le premier la considération du dernier chiffre donne un caractère de divisibilité par 2, 3, 4, 6 et dans l'autre par 2 et 5. De même la divisibilité par 11 ($11 = 12 - 1$) du premier correspond à la divisibilité par 3, 9 du second ($9 = 10 - 1$). On fait correspondre de même les divisibilités par 13 ($13 = 12 + 1$) et par 11 ($11 = 10 + 1$).

(²) Le lecteur trouvera au Chap. V (**52** et suivants) des renseignements complémentaires sur le calcul numérique en général.

à deux nombres quelconques, et dispense de vérifications impossibles à faire, car la suite des nombres est illimitée.

C'est pour donner plus de généralité aux démonstrations que l'on remplace souvent les nombres par des lettres.

4. — *La somme de deux ou plusieurs nombres ne change pas quand on change leur ordre.* On peut par exemple, pour trois collections d'objets, ajouter d'abord la première à la troisième, puis ensuite la seconde au résultat déjà obtenu :

$$a + b + c = c + a + b.$$

On dit parfois que l'addition est une opération *commutative.*

On peut remplacer dans une addition deux ou plusieurs nombres par leur somme effectuée. Pour réunir trois collections d'objets, on pourra ajouter la première et la troisième, puis réunir la seconde au total ainsi obtenu : $a + b + c = (a + c) + b$. La parenthèse indique que la somme $a + c$ doit être d'abord effectuée. L'addition est une opération *associative.*

On ne change pas un nombre donné quand on lui ajoute un autre nombre pour le retrancher ensuite, ou encore (si cela est possible) quand on en retranche un autre nombre pour ensuite le rajouter :

$$a = (a + b) - b = (a - b) + b.$$

Pour retrancher une somme d'un nombre, on peut (si cela est possible) retrancher successivement les diverses parties de cette somme de ce nombre, et inversement, on pourra, au lieu de retrancher plusieurs nombres, retrancher directement leur somme. On a, par exemple :

$$a - (b + c) = (a - b) - c.$$

En effet $b + c$ étant supposé inférieur à a, désignons par δ la différence $a - (b + c)$. D'après la définition de la soustraction, on a :

$$a = \delta + (b + c) = \delta + b + c = b + (\delta + c).$$

Donc a étant la somme de $(\delta + c)$ et de b, on a : $a - b = \delta + c$ ou encore $(a - b)$ étant la somme de δ et de c,

$$(a - b) - c = \delta$$

ce qui est le résultat à établir.

On établirait de façon analogue que : *une suite d'additions et de soustractions peut être effectuée dans un ordre quelconque, pourvu qu'on n'arrive jamais à une soustraction impossible* :

$$a - b - c + d - e + f = d - c + a + f - e - b = a + d + f - b - c - e$$
$$= (a + d + f) - (b + c + e) = \ldots\ldots$$

En particulier, on voit qu'une suite d'additions ou de soustractions peut toujours se ramener à des additions suivies d'une seule soustraction.

Ces propriétés deviennent d'ailleurs à peu près évidentes si l'on imagine qu'il s'agit des sommes reçues ou données par un caissier : chaque somme qu'il reçoit s'ajoute à celle qu'il a déjà en caisse et chaque somme qu'il donne s'en retranche. L'ordre des opérations ne peut changer le résultat final.

5. — D'autres propriétés importantes déduites des précédentes s'interpréteraient de façon analogue :

Pour ajouter à un nombre la différence de deux autres, on peut ajouter le plus grand, puis retrancher le plus petit, ou (si cela est possible) retrancher d'abord le plus petit, puis ajouter le plus grand :

$$a + (b - c) = (a + b) - c = (a - c) + b.$$

Pour retrancher une différence, on retranche le plus grand des deux termes (si cela est possible) et l'on ajoute l'autre, ou bien on ajoute le plus petit et l'on retranche le plus grand :

$$a - (b - c) = (a - b) + (a + c) - b.$$

La différence de deux nombres ne change pas si l'on augmente ou diminue ces deux nombres d'une même quantité :

$$a - b = (a + c) - (b + c) = (a - d) - (b - d).$$

Ces diverses propriétés peuvent s'établir par des raisonnements théoriques. Montrons par exemple que l'on a :

$$a - (b - c) = (a - b) + c.$$

Désignons par δ la différence cherchée entre a et $(b - c)$; on a :

$$a = \delta + (b - c).$$

Il faut en déduire

$$\delta = (a - b) + c.$$

Ajoutons aux deux membres de la première égalité c, en l'ajoutant, ce qui est permis, à la seconde partie de la somme dans le second membre : $a + c = \delta + b$. Ajoutons maintenant b aux deux membres de l'égalité à établir, en l'ajoutant à la première partie de la somme dans le second membre ; on arrive précisément au même résultat : $\delta + b = a + c$.

On peut généraliser ces diverses formules en écrivant par exemple :

$$(a+b-c)+\Big[d-\big((e+f)+(g-h)\big)\Big]-\Big[i-\big(j-(k-l)\big)-m\Big]$$
$$= a+b-c+d-e-f-g+h-i+j-k+l+m$$

formule que l'on justifierait aisément et qui montre que, lorsqu'il y a plusieurs parenthèses, on peut les supprimer toutes, en mettant devant chaque nombre *le signe + ou — suivant que ce nombre est précédé d'un nombre pair ou impair de signes —*.

6. Principes relatifs à la multiplication. — On sait que *la multiplication est une addition abrégée* dans laquelle tous les nombres à additionner sont égaux. Ainsi 6 répété 4 fois s'écrit : $6 \times 4 = 24$ ou encore $6.4 = 24$.

Formons un rectangle (*fig.* 1) par la juxtaposition de carrés identiques ([1]), le nombre de carrés de chaque ligne horizontale

---

([1]) Nous aurons l'occasion de revenir sur ce sujet dans l'étude des aires (**275**).

est 6, et comme il y a 4 lignes identiques, leur nombre total est $6 + 6 + 6 + 6 = 24$; 24 est le produit de 6 par 4.

On voit immédiatement que, sur cette figure, chaque ligne verticale ou colonne, contient 4 carrés et qu'il y a autant de colonnes que de carrés dans la première ligne, soit 6. Le nombre total des carrés est donc aussi égal à 4 répété 6 fois ou à 4.6. On a donc : $6 . 4 = 4 . 6$. Cette démonstration d'ailleurs générale nous conduit au théorème très important : *le produit de deux nombres ne change pas quand on intervertit leur ordre*, ce que l'on peut exprimer par : $a.b = b.a$ ou plus simplement par $ab = ba$. Les deux nombres a et b, *multiplicande* et *multiplicateur*, pouvant être échangés sans inconvénient, ont reçu le nom commun de *facteurs*.

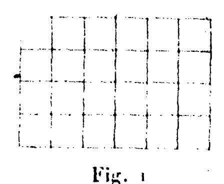


Fig. 1

Il y a une remarque importante à faire sur le théorème qui précède. Les égalités $6.4 = 24$ et $4.6 = 24$ signifient respectivement : « 6 carrés répétés 4 fois donnent 24 carrés » et « 4 carrés répétés 6 fois donnent 24 carrés ». Dans aucun cas on ne dit : « ... répétés 4 carrés fois ... », car cela n'aurait visiblement aucun sens. L'un quelconque des deux facteurs d'une multiplication représente donc des unités et des objets de nature quelconque, mais l'autre indique simplement, dans tous les cas, le nombre des termes de l'addition à effectuer. Les expressions : « 6 mètres multipliés par 4 mètres », « 4 litres multipliés par 3 francs » n'ont donc aucun sens et doivent être soigneusement évitées.

La définition de la multiplication, étant basée sur l'idée de répétition ne convient plus si le multiplicateur est égal à 1 ou à 0. On l'étend à ces deux cas, en convenant de dire qu'un nombre multiplié par 1 ne change pas, et qu'un nombre multiplié par 0 donne pour produit 0. On a encore dans le cas où l'un des facteurs est 1 ou 0 : $ab = ba$.

Si l'un des facteurs d'un produit est nul, ce produit est nul, et inversement, un produit de deux facteurs ne peut être nul que si l'un des deux facteurs est nul.

Pour multiplier un nombre par une somme, on peut le multiplier séparément par les diverses parties de cette somme, puis ajouter les résultats :

$$m(a + b) = ma + mb.$$

Soit en effet à effectuer $5(4 + 3)$; cela revient à répéter 7 fois 5, ce que l'on peut faire en répétant 5 d'abord 4 fois, puis 3 fois. Donc :

$$5(4 + 3) = 5.4 + 5.3.$$

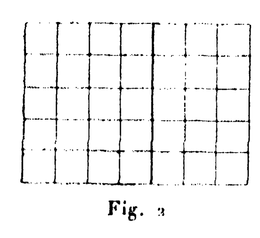


Fig. 2

Le dessin (*fig.* 2) conduit au même résultat : pour évaluer le nombre total des carrés contenus dans 7 lignes de 5 carrés, on peut compter le nombre total des carrés contenus dans 4 lignes, puis dans 3, et ajouter les résultats. On établirait de façon analogue les théorèmes qu'expriment les égalités :

$$m(a - b) = ma - mb$$
$$m(a + b + c) = ma + mb + mc$$
$$m(a - b + c - d - e) = ma - mb + mc - md - me.$$

Les deux facteurs d'un produit pouvant être intervertis, on a :

$$(a + b)\, m = am + bm$$
$$(a - b + c - d - e)m = am - bm + cm - dm - em.$$

Inversement d'ailleurs dans une expression :

$$am - bm + cm - dm - em,$$

on sépare souvent m dans tous les termes pour écrire l'expression sous la forme : $(a - b + c - d - e)m$. Effectuer une telle opération s'appelle *mettre en facteur* le nombre m.

7. — Pour effectuer le *produit de plusieurs facteurs* : $a, b, c, ..$ en nombre quelconque, on multiplie a par b, puis le résultat

obtenu par c, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on ait employé tous les facteurs. Exemple :

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 30 \cdot 4 = 120.$$

Le produit de plusieurs facteurs ne change pas quand on intervertit de façon quelconque l'ordre des facteurs.

Cet important théorème a déjà été établi pour le cas de deux facteurs. Montrons d'abord que, dans un produit de plusieurs facteurs, on peut changer l'ordre des deux derniers. Par exemple : $3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 4 = 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 6$. Prenons en effet (*fig.* 3) un tableau formé de 4 lignes de 6 carrés, chaque carré représentant non pas une unité, mais $3 \cdot 5$ ou 15 unités et additionnons toutes les unités du tableau : la première ligne contient 6 fois $3 \cdot 5$ unités soit $3 \cdot 5 \cdot 6$ unités et comme il y a 4 lignes semblables, le nombre total est $3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 4$ unités. Un raisonnement analogue montre que dans chaque colonne il y a $3 \cdot 5 \cdot 4$ unités et dans les 6 colonnes : $3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 6$. Donc :

15	15	15	15	15	15
15	15	15	15	15	15
15	15	15	15	15	15
15	15	15	15	15	15

Fig. 3

$$3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 4 = 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 6.$$

On peut changer l'ordre de deux facteurs consécutifs, car si $3 \cdot 5 \cdot 6 = 3 \cdot 6 \cdot 5$ en répétant chacun de ces résultats 4 fois, on en déduit : $3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 4 = 3 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$. Pour passer au cas général, il suffit, par des échanges de deux facteurs consécutifs, d'amener chaque facteur à la place qu'il doit occuper ; c'est ainsi que pour établir $3 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 6$, on aura successivement :

$$3 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 4 = 5 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 4 = 5 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 6.$$

La multiplication est une opération *commutative*.

Dans un produit de plusieurs facteurs, on peut remplacer deux ou plusieurs facteurs par leur produit effectué. On a : $3 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 7 = 3 \cdot (6 \cdot 7 \cdot 5) \cdot 4$. Il suffit en effet d'amener,

d'après le théorème précédent, les facteurs considérés à se trouver en tête du produit :

$$3.6.5.4.7 = 6.7.5.3.4 = (6.7.5).3.4 = 3.(6.7.5).4$$

le produit 6 . 7 . 5 étant supposé effectué dans les deux dernières égalités. La multiplication est une opération *associative*.

Nous laissons au lecteur le soin d'en déduire la proposition suivante : *pour multiplier un produit de plusieurs facteurs par un nombre, il suffit de multiplier l'un des facteurs par ce nombre*. Ces diverses propriétés montrent que, dans la multiplication comme dans l'addition, on peut effectuer les opérations dans tel ordre que l'on veut, sans altérer le résultat.

8. Puissances. — Si les n facteurs d'un produit sont égaux à un même nombre a, le produit s'appelle *puissance $n^{ième}$* de a. Le nombre n s'appelle *exposant* Par exemple la « quatrième puissance » de 3 ou 3 « puissance 4 » est : $3^4 = 3.3.3.3 = 81$. Les exposants 3 et 2 se désignent sous le nom de *cube* ou *carré*. Le « cube de 3 » ou « 3 au cube » est $3^3 = 3 . 3 . 3 = 27$. De même le « carré de 3 » ou « 3 au carré » est $3^2 = 3 . 3 = 9$. La puissance 1 d'un nombre est par définition ce nombre lui-même : $3^1 = 3$. On n'écrit pas habituellement cet exposant.

Le produit de deux ou plusieurs puissances d'un même nombre est une nouvelle puissance de ce nombre, ayant pour exposant la somme des exposants des puissances données. On a :

$$3 . 3^4 . 3^2 = 3^1 . 3^4 . 3^2 = 3^{1+4+2} = 3^7.$$

En effet :

$$3 . 3^4 . 3^2 = (3) . (3 . 3 . 3 . 3) . (3 . 3) = 3 . 3 . 3 . 3 . 3 . 3 . 3 = 3^7.$$

De façon générale on a : $a^m . a^n . a^p . . . = a^{m+n+p+ \cdots}$

Si l'on a un produit de n facteurs égaux à a^m, ce produit est, d'après la règle précédente : $a^m . a^m . a^m \ldots = a^{m+m+m+ \cdots} = a^{mn}$. Mais, d'autre part, ce produit peut s'écrire $(a^m)^n$, car c'est le produit de n facteurs égaux à a^m. Donc *pour élever une puissance d'un nombre à une certaine puissance, il suffit de multi-*

plier les deux exposants l'un par l'autre pour avoir le nouvel exposant du nombre donné. Remarquons que l'on a par suite : $(a^m)^n = (a^n)^m$. On verrait par des raisonnements analogues que *pour élever un produit de plusieurs facteurs à une certaine puissance, il suffit d'élever à cette puissance chacun des facteurs.*

9. — *Le carré d'une somme de deux nombres peut s'obtenir en ajoutant à la somme des carrés des deux nombres leur double produit*, ce que l'on peut traduire par

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab.$$

On a en effet : $(a + b)^2 = (a + b) . (a + b)$, mais pour multiplier un nombre $(a + b)$ par une somme $a + b$, on multiplie ce nombre séparément par a et b et l'on ajoute les résultats :

$$(a+b)(a+b)=(a+b)a+(a+b)b=a.a+b.a+a.b+b.b$$
$$= a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

On peut encore établir cette propriété en représentant a et b par des lignes de carrés (*fig.* 4). Le nombre des carrés de la première ligne de A étant ici $a = 3$ et celui des carrés de la première ligne de B étant $b = 4$, la première ligne contient $a + b = 3 + 4 = 7$ carrés. En procédant de même pour les colonnes, on a comme on le voit un carré formé de quatre parties : A, B, C, D. Le nombre des petits carrés de A est $3.3 = a^2$. Pour B on a $4.3 = ab$; pour C on a encore ab et enfin pour D on a $4.4 = b^2$. D'autre part le nombre total est $7.7 = (a + b)^2$, ce qui démontre la propriété (**73, 86**).

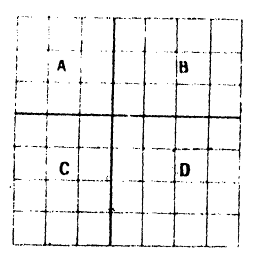


Fig. 4

On établirait par des raisonnements analogues que :

Le carré de la différence de deux nombres peut s'obtenir en retranchant de la somme des carrés des deux nombres leur double produit :

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab.$$

Le produit de la somme de deux nombres par leur différence est égal à la différence de leurs carrés :

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

10. Division. — Nous nous contenterons de rappeler sommairement les définitions diverses que l'on peut donner de la division de deux nombres.

On considère parfois la division comme une *opération inverse de la multiplication*. Etant donnés un produit de deux facteurs a, et l'un des facteurs b, trouver l'autre q s'appelle diviser a par b. Ainsi 6 divisé par 3 donne 2, ce que l'on écrit : $\frac{6}{3} = 2$. Les nombres a, b, q, s'appellent respectivement le *dividende*, le *diviseur* et le *quotient*.

Il est aisé de voir qu'une telle division n'est pas toujours possible. On ne peut pas diviser 7 par 5, ni 7 par 3, etc... Mais on peut remarquer que, pour diviser 6 par 3, il suffit de chercher combien de fois 3 unités sont contenues dans 6 unités, et sous cette forme nous allons voir que l'on peut définir dans tous les cas le quotient de a par b :

Diviser a par b, c'est trouver le plus grand nombre q de fois que b est contenu dans a. Ainsi 3 est contenu 2 fois dans 7, puisque 2 fois 3 font 6, nombre inférieur à 7, mais n'y est pas contenu 3 fois, puisque 3 fois 3 font 9, nombre supérieur à 7. Le quotient de 7 par 3 est alors 2 ; on dit parfois que c'est le quotient *par défaut* ; 3 serait le quotient *par excès*. Le nombre 1 qui exprime combien il reste d'unités dans 7 quand on en retranche 2 fois 3 unités s'appelle le reste de la division, r. On a donc : $7 = 3 . 2 + 1$ ou de façon plus générale :

$$a = bq + r$$

le reste r étant inférieur à b. Dans le cas particulier où le reste r est nul, on a $a = bq$. On dit alors que la division se fait exactement. C'est là le cas que nous avions considéré au début.

En se servant d'inégalités (**11**), on peut encore écrire :

$$bq \leqslant a < b(q+1)$$

puisque b est contenu q fois, mais non $q+1$ fois dans a. Le cas où l'on a $bq = a$ et non $bq < a$ est celui où la division se fait exactement.

Remarquons que, si l'on peut définir le produit de a par b quand b est nul, il n'en est pas de même pour le quotient de a par b, car cette expression n'a aucun sens quand b est nul.

11. Inégalités. — Toutes les propriétés qui précèdent servent à établir l'égalité de deux expressions qui, au premier abord, peuvent sembler différentes. Exemple :

$$a + b - b = a; \ ab = ba; \ (a+b)(a-b) = a^2 - b^2, \text{ etc.}$$

Il arrive parfois que l'on veuille établir qu'un nombre a est plus grand qu'un autre nombre b. Une telle relation s'appelle une *inégalité* et s'écrit : $a > b$. Si a est plus petit que b, on écrira $a < b$. Remarquons que par suite $a > b$ est identique à $b < a$.

En ajoutant à un nombre un autre nombre non nul, on obtient un nombre plus grand que le premier : $a + b > a$.

On ne change pas le sens d'une inégalité en ajoutant un même nombre aux deux termes de cette inégalité ou (quand cela est possible) en retranchant ce nombre des deux termes. L'inégalité $a > b$ entraîne : $a + c > b + c$ et $a - d > b - d$.

On peut ajouter membre à membre deux inégalités de même sens. Par exemple, de $a > b$ et $c > d$, on déduit $a + c > b + d$, puisqu'on ajoute, d'une part, les deux plus grands nombres a et c, et, d'autre part, les deux plus petits b et d.

On ne change pas le sens d'une inégalité en multipliant ses deux membres par un même nombre. Si $a > b$, on a aussi $ma > mb$. En effet, il suffit d'écrire les m inégalités :

$$a > b$$
$$a > b$$
$$\cdots\cdots$$
$$a > b$$

et d'ajouter les premiers membres entre eux et les seconds membres entre eux. Dans le cas particulier où $b = 1$, l'inégalité $a > 1$ entraîne $ma > a$.

On peut multiplier membre à membre deux inégalités de même sens : $a > b$ et $\alpha > \beta$ donnent $a\alpha > b\beta$. Supposons, en effet, b et β non nuls ; $a > b$ entraîne comme on l'a vu $a\alpha > b\alpha$, et, d'autre part, $\alpha > \beta$ entraîne $b\alpha > b\beta$. La comparaison de ces deux résultats donne bien $a\alpha > b\beta$.

On établirait aisément les propositions suivantes :

Si l'on considère deux puissances d'un même nombre, la plus grande de ces deux puissances est celle qui a le plus grand exposant. L'inégalité $m > n$ entraîne $a^m > a^n$ pourvu cependant que a ne soit pas égal à 1.

Si l'on considère une même puissance de deux nombres inégaux, la plus grande de ces deux puissances est celle qui correspond au plus grand nombre. L'inégalité $a > b$ entraîne $a^m > b^m$.

Exercices. — Nos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 18, 114.

CHAPITRE II

DIVISIBILITÉ — NOMBRES PREMIERS

12. Principes de la divisibilité. — Dans les problèmes concernant la division, il arrive parfois que l'on ait uniquement besoin de savoir si un nombre a peut être divisé exactement par un nombre b, et, dans le cas où cela n'a pas lieu, quel est le reste. Si, par exemple, on veut établir un tronçon de voie ferrée de 3618 mètres, on verra que le problème est possible en employant uniquement des rails de 18 mètres de long, parce que 3618 est *divisible* par 18, ou encore est un *multiple* de 18 ; 18 est un *diviseur* ou un *sous-multiple* de 3618. Au contraire, si la longueur de la voie ferrée est de 3630 mètres, en employant des rails de 18 mètres, il restera une longueur de 12 mètres non couverte de rails, parce que le reste de la division de 3630 par 18 est 12.

Il existe, dans certains cas, des règles simples permettant de prévoir si un nombre a est divisible par un nombre b. Elles montrent immédiatement que 546 est divisible par 2 ; 3645 par 15 ; que 627 n'est pas divisible par 5, le reste de la division étant 2, et cela sans avoir besoin d'effectuer les divisions indiquées. Nous établirons les plus importantes de ces règles (**14**).

Si deux nombres a et b sont divisibles par un même nombre n, il en est de même de leur somme et de leur différence. Si a et b sont multiples de n, on a en désignant par α et β les quotients de a et b par n :

$$a = \alpha n \qquad b = \beta n.$$

Ajoutons membre à membre ces deux égalités, on en déduit :

$$a + b = \alpha n + \beta n = (\alpha + \beta) . n$$

qui montre bien que $a + b$ est multiple de n. On en déduit, en outre, que le quotient de la somme de deux nombres a et b par n est la somme des quotients par n de ces deux nombres. On a de même :

$$a - b = (\alpha - \beta) n$$

et l'on ferait une remarque analogue à la précédente sur les quotients de la division par n d'une somme ou d'une différence.

Plus généralement, si a, b, c, d sont multiples de n, il en est de même de toute expression telle que $a + b - c + d$.

Si a est divisible par n, il en est de même de tout multiple de a. Si a est divisible par n, on a $a = \alpha n$, et par suite pour ma multiple considéré de a :

$$ma = m . \alpha n = m\alpha . n.$$

Donc ma est divisible par n. Le quotient par n de ma est d'ailleurs le produit par m du quotient de a par n.

En particulier, un produit de plusieurs facteurs est divisible par un nombre, si l'un des facteurs l'est. La condition est suffisante, mais non nécessaire : c'est ainsi que 9×4 ou 36 est divisible par 6 qui ne divise ni 9, ni 4. Ceci montre encore que si un nombre 36 est divisible par un autre 6, il n'en est pas forcément de même de tous ses sous-multiples (**16**).

13. — Les remarques qui précèdent concernent uniquement les propriétés des multiples d'un nombre n. Considérons maintenant le cas de nombres quelconques.

On ne change pas le reste de la division par n de la somme, de la différence ou du produit de deux nombres A *et* B *si l'on augmente ou si l'on diminue chacun d'eux d'un multiple quelconque de n.* Prenons, par exemple, le dernier cas et montrons que le reste de division par n de $(A + pn)(B + qn)$ est le même que le reste de division par n de AB. On a (**6**) :

$$(A + pn)(B + qn) = AB + A . qn + pn . B + pn . qn.$$

Les trois derniers termes de cette somme étant des multiples de n, il en est de même de leur somme que l'on peut représenter par kn, et le produit s'écrit : $AB + kn$. Effectuons maintenant la division par n du produit AB, division qui donne comme quotient Q et comme reste r, ce que l'on peut écrire :

$$AB = Qn + r \qquad \text{avec} \qquad r < n.$$

Mais, par suite :

$$\begin{aligned}(A + pn)(B + qn) &= AB + kn = Qn + r + kn \\ &= (Q + k)n + r \qquad\qquad \text{avec } r < n\end{aligned}$$

qui exprime bien que r est encore le reste de division par n de $(A + pn)(B + qn)$.

En particulier, on peut toujours remplacer A et B par les restes de leurs divisions par n dans l'énoncé qui précède.

Ce théorème permet parfois de faire certaines vérifications rapides ; c'est ainsi que si l'on trouve pour produit d'un nombre pair par un nombre impair un nombre impair, on saura que l'opération est inexacte, car le reste de division par 2 du premier facteur est 0, et celui du second est 1 ; le produit de ces deux nombres étant 0, le reste de division par 2 du résultat ne peut être 1.

Dans certaines théories d'arithmétique supérieure, on dit parfois que deux nombres a et b sont *congrus par rapport au module* n, si les restes de division par n de ces deux nombres sont les mêmes, et l'on écrit alors :

$$a \equiv b \qquad\qquad (\text{mod}\ .\ n).$$

En particulier :

$$a \equiv 0 \qquad\qquad (\text{mod}\ .\ n).$$

exprime que a est divisible par n. De telles égalités s'appellent des *congruences*. Avec ces notations, les congruences :

$$A \equiv a \qquad\qquad (\text{mod}\ .\ n)$$
$$B \equiv b \qquad\qquad (\text{mod}\ .\ n)$$

entraînent les nouvelles congruences :

$$A + B \equiv a + b \qquad (\text{mod} . n)$$
$$A - B \equiv a - b \qquad (\text{mod} . n)$$
$$AB \equiv ab \qquad (\text{mod} . n).$$

Nous n'insisterons pas davantage sur ces notations qui malgré leur commodité sont peu employées en arithmétique élémentaire.

14. Caractères de divisibilité. — Les propriétés qui précèdent ne supposent évidemment rien sur le système de numération dans lequel sont écrits les nombres considérés. Il n'en est pas de même pour les règles pratiques qui suivent. Par exemple, on voit immédiatement qu'un nombre est divisible par 10 dans le système décimal, si le chiffre qui le termine à droite est un zéro ; cette règle ne convient plus dans le système duodécimal.

Le reste de la division par 2, *par* 5, *ou par* 10 *d'un nombre écrit dans le système décimal est le reste de la division par* 2, 5 *ou* 10 *de son dernier chiffre à droite.* Si en effet a est ce dernier chiffre à droite, le nombre donné peut s'écrire $10 . b + a$ en désignant par b le nombre des dizaines ; $10 . b$ étant multiple de 10 est divisible par 2 et par 5. Donc le reste de la division est le même pour le nombre considéré et pour son dernier chiffre a.

En particulier *un nombre est divisible par* 2 *ou par* 5 *si son dernier chiffre l'est.* Un nombre divisible par 2, ou nombre pair, est donc terminé par un des chiffres 0,2,4,6,8 ; un nombre divisible par 5 est terminé par 0 ou 5 ; et un nombre divisible par 10 est terminé par 0.

On établirait de façon analogue que : *Le reste de la division par* 4, *par* 25, *par* 50 *ou par* 100 *d'un nombre écrit dans le système décimal est le même que le reste de la division par* 4, 25, 50 *ou* 100 *du nombre formé par ses deux derniers chiffres de droite.* On en déduit ici encore le caractère de divisibilité correspondant : *Un nombre est divisible par* 4, 25, 50 *ou* 100, *si le nombre formé par ses deux derniers chiffres de droite est divisible par* 4, 25, 50 *ou* 100. Un nombre divisible par 4 sera terminé par : 00,

04, 08, 12, 16, 20..., 88, 92, 96 ; un nombre divisible par 25, par 00, 25, 50, 75 ; un nombre divisible par 50, par 00 ou 50 et enfin un nombre divisible par 100 sera terminé par 00.

15. — *Le reste de la division par 3 ou 9 d'un nombre écrit dans le système décimal est le même que le reste de la division par 3 ou 9 de la somme de ses chiffres.* Il est facile de voir tout d'abord que 10, 100, 1 000,.... sont des multiples de 3 ou de 9 augmentés d'une unité, ce que l'on peut écrire en abrégé, en se bornant à la divisibilité par 9 :

$$10 = \text{m. de } 9 + 1 \quad 100 = \text{m. de } 9 + 1 \quad 1\,000 = \text{m. de } 9 + 1 \ldots$$

Si maintenant nous prenons un nombre quelconque 75 382, on a pour les dizaines de mille de ce nombre (**13**) :

$$70\,000 = 7 \,.\, 10\,000 = 7\,(\text{m. de } 9 + 1) = \text{m. de } 9 + 7.$$

On obtiendrait des égalités analogues pour 5 000, 300,... ce qui nous conduit à dresser le tableau suivant :

$$\begin{aligned} 70\,000 &= \text{m. de } 9 + 7 \\ 5\,000 &= \text{m. de } 9 + 5 \\ 300 &= \text{m. de } 9 + 3 \\ 80 &= \text{m. de } 9 + 8 \\ 2 &= \phantom{\text{m. de } 9 + {}} 2 \end{aligned}$$

Ajoutons membre à membre :

$$\begin{aligned} 75\,382 &= \text{m. de } 9 + 7 + 5 + 3 + 8 + 2 \\ &= \text{m. de } 9 + 25 = \text{m. de } 9 + 7 \end{aligned}$$

25 étant la somme des chiffres de 75 382, la propriété se trouve établie. Dans la pratique on procède plus rapidement en disant : 7 et 5 font 12 que l'on remplace par la somme de ses chiffres : 3 ; puis 3 et 5 font 6 ; 6 et 8 font 14 que l'on remplace de même par 5 ; enfin 5 et 2 donnent 7 qui est le reste cherché.

Ce calcul sert à faire la *preuve par* 9 d'une multiplication. Si par exemple on a effectué le produit 785 . 26 = 20410, les restes de division par 9 de 785 et de 26 sont 2 et 8. Leur pro-

duit 16 est un multiple de 9 augmenté de 7. On en conclut (**13**) que 20410 doit être aussi un multiple de 9 augmenté de 7, ce qui a lieu ici. Si une telle vérification ne réussit pas, les calculs sont inexacts, mais, si elle a lieu, on n'a nullement le droit d'en conclure que l'opération est exacte.

On déduit encore de ce qui précède le caractère de divisibilité suivant : *un nombre est divisible par 3 ou par 9, si la somme de ses chiffres est divisible par 3 ou par 9.*

Signalons encore le caractère de divisibilité par 11. Un nombre est divisible par 11, si la somme de ses chiffres de rang pair et la somme de ses chiffres de rang impair ne diffèrent que par un multiple de 11. Nous ne donnerons pas la démonstration, qui est basée sur ce fait que les puissances consécutives de 10 sont alternativement des multiples de 11 augmentés ou diminués de 1.

Nous verrons que l'on peut déduire de ces diverses règles de nouveaux caractères de divisibilité par 6, 15, 18, etc... (**20**).

16. Nombres premiers. — Dressons la liste des diviseurs des premiers nombres entiers en essayant pour chacun d'eux tous les entiers qui lui sont inférieurs :

Nombres	Diviseurs	Nombres	Diviseurs
1	1	6	1, 2, 3, 6
2	1, 2	7	1, 7
3	1, 3	8	1, 2, 4, 8
4	1, 2, 4	9	1, 3, 9
5	1, 5	...	......

On voit que certains nombres n'ont que deux diviseurs, dont l'un est l'unité et l'autre le nombre lui-même. Ceci a lieu pour : 2, 3, 5, 7,... Ces nombres ont reçu le nom de *nombres premiers*. On convient de considérer également 1 comme nombre premier.

L'importance de l'étude de ces nombres premiers est justifiée par la propriété suivante et les conséquences qui en découlent : *Tout nombre non premier peut être décomposé en un produit de*

facteurs premiers. Prenons en effet un nombre quelconque N et dressons la liste des diviseurs ; le plus petit d'entre eux, autre que l'unité, a, est un nombre premier, car tout diviseur d de a serait diviseur de N et inférieur à a, ce qui est contraire à l'hypothèse. On a : $N = aA$. Si A est premier, la décomposition est terminée ; sinon, il admet de même un facteur premier b et l'on a : $A = bB$ et par suite : $N = abB$. En continuant de la sorte, on obtient des nombres A, B,... qui vont en décroissant ; leur liste s'arrête donc forcément et la décomposition est possible. Nous allons même voir qu'elle ne l'est que d'une seule façon.

Nous nous appuierons pour cela sur un théorème très important que nous ne démontrerons pas :

Si un nombre premier p divise un produit de deux facteurs, il divise l'un d'eux. Si p n'est pas premier, nous savons qu'il peut diviser le produit ab sans diviser l'un des facteurs (**12**).

En particulier, un nombre premier p qui divise un produit de plusieurs facteurs premiers $a . b . c . d . . . l$ égaux ou non est égal à l'un d'eux, car divisant le produit de a par $b . c . d . . . l$ il divisera a ou le produit $b . c . d . . . l$. De même s'il divise le produit de b par $c . d . . . l$ il divisera b ou $c . d . . . l$, et ainsi de suite. On trouve ainsi un facteur q que p divise, ce qui suppose $p = q$.

On déduit de cette propriété que *la décomposition d'un nombre en facteurs premiers n'est possible que d'une seule façon*. Si, en effet, l'on avait obtenu de deux façons différentes la décomposition d'un nombre N en facteurs premiers :

$$N = a . b . c . . . l = a' . b' . c' . . . k'$$

en supprimant les facteurs communs aux deux décompositions, on aurait une égalité telle que $a . b . c = a' . b'$, égalité impossible, a devant diviser le second membre et par suite être égal à a' ou b', ce qui est contraire aux hypothèses.

Les propriétés qui précèdent simplifient énormément, comme nous le verrons (**19**), l'étude de la divisibilité, la recherche des diviseurs communs à deux ou plusieurs nombres, etc... et jus-

tifient par cela même une étude un peu plus approfondie des nombres premiers.

17. — La liste des nombres premiers est assez facile à dresser lorsqu'on se borne aux nombres de 2 ou 3 chiffres. Cherchons par exemple quels sont les nombres premiers inférieurs à 100. Dressons la liste :

1	2	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29
	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59
	61	63	65	67	69	71	73	75	77	79	81	83	85	87	89
	91	93	95	97	99	..	..	..	..						

dans laquelle on a supprimé les nombres pairs qui, à l'exception de 2, ne sont jamais premiers. Soulignons, à partir de 3, les nombres de 3 en 3, ce qui donne : 9, 15, 21, 27, ... ; puis, à partir de 5, les nombres de 5 en 5, c'est-à-dire : 15, 25, 35, ... ; puis, à partir de 7, de 7 en 7 ; à partir de 11, de 11 en 11, etc..., en partant chaque fois du premier nombre non souligné. On obtient ainsi le tableau :

1	2	3	5	7	9	11	13	$\underline{15}$	17	19	$\underline{21}$	23	$\underline{25}$	$\underline{27}$	29
	31	$\underline{33}$	$\underline{35}$	37	39	41	43	$\underline{45}$	47	$\underline{49}$	$\underline{51}$	53	$\underline{55}$	$\underline{57}$	59
	61	$\underline{63}$	$\underline{65}$	67	$\underline{69}$	71	73	$\underline{75}$	$\underline{77}$	79	$\underline{81}$	83	$\underline{85}$	$\underline{87}$	89
	91	$\underline{93}$	$\underline{95}$	97	$\underline{99}$	..	..	..	..						

Les nombres non soulignés sont tous les nombres premiers inférieurs à 100. Remarquons d'abord que, si l'on souligne tous les nombres de p en p à partir de p, les nombres soulignés : $p + 2p = 3p$, $p + 2p + 2p = 5p$, etc... étant des multiples de p ne sont pas premiers. Ceux qui restent sont premiers, car, si l'un d'eux admettait un diviseur premier p, il aurait été supprimé comme multiple de p comme on le verra aisément. Nous laisserons encore au lecteur le soin de montrer que, pour supprimer les multiples de p, il suffit de partir de $p \cdot p$. En particulier ici, le premier nombre à souligner à partir de

11 étant $11^2 = 121$ qui n'est pas dans la table, on peut s'arrêter aux multiples de 7.

Ce procédé connu sous le nom de *crible d'Eratosthène* donne ainsi pour les nombres premiers inférieurs à 100 ([1]) :

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37,
41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

18. — On peut constater, en dressant des tables plus étendues, que les nombres premiers deviennent de plus en plus rares : il y en a par exemple 169 de 0 à 1 000 ; de 10 000 à 11 000, il y en a 106 ; de 100 000 à 101 000, il y en a 81 ; etc.. On démontre que malgré cela *la suite des nombres premiers est illimitée*, c'est-à-dire qu'il existe toujours un nombre premier supérieur à un nombre donné N, si grand qu'il soit. On démontre par contre que, si grand que soit N, on peut toujours trouver N nombres entiers consécutifs dont aucun ne soit premier. On pourra par exemple trouver un million de nombres consécutifs ne comprenant aucun nombre premier. Malgré les recherches de nombreux mathématiciens, tels que Fermat, Euler, Gauss,... on ne sait que très peu de choses sur les grands nombres premiers, ou même sur les nombres premiers en général, sur leur répartition dans la suite des nombres, etc.

Les tables de nombres premiers permettent de décomposer un nombre en ses facteurs premiers ([2]). Soit par exemple à décomposer le nombre 5390. Essayons successivement tous les facteurs premiers : 2, 3, 5, 7, ... Le nombre 5390 terminé

([1]) On trouvera à la fin du volume la liste des nombres premiers inférieurs à 1 000.

([2]) Il est commode en pratique d'employer une table donnant les plus petits diviseurs des nombres. A la fin du volume on trouvera cette table pour les nombres inférieurs à 1 000. Les nombres premiers ou divisibles par 2, 3 ou 5 ne sont pas inscrits. Soit à décomposer à l'aide de cette table 539 en facteurs premiers. On voit d'abord que 7 est le plus petit de ces facteurs ; la division de 539 par 7 donne 77, dont le plus petit diviseur 7 est encore inscrit dans la table. Le quotient de 77 par 7 est un nombre premier 11. Donc $539 = 7^2.11$.

par un 0 est divisible par 2. Le quotient est 2695 qui n'est plus divisible par 2. Ce nombre n'est pas divisible par 3, la somme de ses chiffres ne l'étant pas. Il est divisible par 5, son dernier chiffre étant 5. Le quotient est 539, pour lequel il est inutile d'essayer à nouveau 2 ou 3. Le facteur 5 ne convient plus, mais 7 donne 77 qui lui-même se décompose en 7 . 11. On a donc :

$$5390 = 2 . 5 . 7 . 7 . 11$$

ou en mettant les facteurs par ordre de grandeur : $2 . 5 . 7^2 . 11$.

5390	2
2695	5
539	7
77	7
11	11

On dispose l'opération comme ci-contre.

Si aucun des nombres premiers inférieurs au nombre donné ne le divise, c'est que le nombre donné est premier. Le lecteur pourra même établir qu'il suffit de s'arrêter dans ces essais au plus grand nombre premier dont le carré est inférieur au nombre donné. Par exemple 397 est premier, parce qu'il n'est divisible par aucun des nombres : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 et que $20^2 = 400$, nombre supérieur au nombre considéré.

19. Applications des propriétés des nombres premiers. — Nous allons étudier quelques problèmes que l'on peut se poser sur la divisibilité des nombres, en supposant que les nombres dont il s'agit soient, au préalable, décomposés en leurs facteurs premiers. Si un nombre est premier, la décomposition est effectuée par cela même.

Pour qu'un nombre a soit divisible par un autre b, il faut et il suffit que tous les facteurs premiers de b se retrouvent dans a, avec un exposant au moins égal. La condition est nécessaire, car si a est divisible par b, on a : $a = b . q$, et, les décompositions en facteurs premiers des deux membres devant être identiques, les facteurs premiers de b doivent tous se retrouver dans a, et s'y retrouver au moins le même nombre de fois que dans b. La condition est suffisante, car si a contient tous les facteurs de b avec des exposants au moins égaux, en mettant ces facteurs en

évidence dans a, on aura $a = b \cdot q$. Par exemple : 604 800 = $2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$ est divisible par $270 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5$, et le quotient est : $2^6 . 5 . 7 = 2240$. On voit que le quotient de deux nombres décomposés en facteurs premiers s'obtient immédiatement. Le produit de ces deux nombres est de même ici : $2^8 \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7 = 163\,296\,000$.

Etant donné un nombre a, on peut donc former tous les diviseurs de ce nombre en assemblant de toutes les façons possibles les facteurs premiers de ce nombre avec des exposants au plus égaux à ceux qu'ils ont dans ce nombre. Par exemple les diviseurs de $270 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5$ sont :

1	2	3	2.3	3^2	2.3^2	3^3	2.3^3
5	2.5	3.5	2.3.5	$3^2.5$	$2.3^2.5$	$3^3.5$	$2.3^3.5$

ou par ordre de grandeur :

1 2 3 5 6 9 10 15 18 27 30 45 54 90 135 270.

20. — Si l'on veut chercher les *diviseurs communs* à deux nombres a et b, on peut dresser les listes de leurs diviseurs et chercher quels sont ceux qui appartiennent aux deux listes, mais il est plus simple de remarquer que tous ces nombres sont formés des facteurs premiers communs à a et b, chacun d'eux étant pris au plus avec le plus petit des exposants qu'il a dans ces deux nombres. C'est ainsi que les diviseurs communs à $270 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5$ et $1\,575 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$ sont

$$1 \quad 3 \quad 3^2 \quad 5 \quad 3 \cdot 5 \quad 3^2 \cdot 5.$$

Leur formation même montre que ce sont tous les diviseurs du plus grand d'entre eux $3^2.5 = 45$: *tous les diviseurs communs à deux nombres sont des diviseurs du plus grand d'entre eux qu'on appelle le plus grand commun diviseur des deux nombres* (en abrégé : p. g. c. d). De façon analogue, le p. g. c. d. de plusieurs nombres se formerait comme pour deux nombres en prenant les facteurs communs à tous ces nombres avec chaque fois le plus petit exposant.

Il peut arriver que deux nombres aient pour p. g. c. d. l'unité. Cela a lieu pour $273 = 3 . 7 . 13$ et $550 = 2 . 5^2 . 11$. On dit que de tels nombres sont *premiers entre eux*. Si nous reprenons les deux nombres : $270 = 2 . 3^3 . 5$ et $1575 = 3^2 . 5^2 . 7$ pour les diviser par leur p. g. c. d. : $3^2 . 5$, nous voyons que les quotients : $2 . 3$ et $5 . 7$ ne peuvent avoir aucun facteur premier commun, car un tel facteur aurait été pris dans la formation du p. g. c. d. des deux nombres ; ils sont premiers entre eux : *les quotients de deux nombres par leur p. g. c. d. sont deux nombres premiers entre eux.*

Nous énoncerons encore les trois théorèmes suivants qui résultent presque immédiatement de ce qui précède et que le lecteur établira sans peine :

Les puissances de deux nombres premiers entre eux sont des nombres premiers entre eux.

Si un nombre divise un produit de deux facteurs et est premier avec l'un d'eux, il divise l'autre. Cette propriété généralise l'énoncé analogue concernant un diviseur premier (**16**).

Si un nombre est divisible par deux autres premiers entre eux, il est divisible par leur produit : 3645 est divisible par 15 parce qu'il l'est séparément par 3 et par 5. Ce dernier théorème permet donc de donner de nouveaux caractères de divisibilité : un nombre est divisible par 6, s'il est terminé par un chiffre pair et si la somme de ses chiffres est divisible par 3, car alors il est divisible par 2 et par 3. On étudierait de même la divisibilité par $15 = 3.5$, par $18 = 2 \ 9$, par $12 = 3.4$, etc...

21. — Au lieu d'étudier les diviseurs communs à deux nombres, on peut étudier leurs multiples communs, multiples qui sont en nombre infini. Par exemple, étant donnés les deux nombres : $270 = 2 . 3^3 . 5$ et $1575 = 3^2 . 5^2 . 7$, prenons un multiple commun à ces deux nombres : $2 . 3^3 . 5^2 . 7 = 9450$; les multiples de 9450 seront des multiples communs aux deux nombres. Il faut cependant remarquer que tout multiple commun à ces nombres possèdera le facteur 2, à cause de 270 ; de même le facteur 3 y sera contenu au moins 3 fois, le facteur 5 au

moins 2 fois, et le facteur 7 au moins une. Ils seront donc tous multiples de $2 \,.\, 3^3 \,.\, 5 \,.\, 7 = 9\,450$ et ici encore on verrait aisément que la propriété est générale : *tout multiple commun à deux nombres est un multiple du plus petit d'entre eux que l'on appelle le plus petit commun multiple des deux nombres* (en abrégé : p. p. c. m.) On le forme, comme on voit, en prenant tous les facteurs premiers communs aux deux nombres, ou non communs, avec chaque fois le plus fort des deux exposants qu'il a dans ces nombres. On aurait une règle analogue pour le p. p. c. m. de plusieurs nombres.

Si nous reprenons les deux nombres : $270 = 2 \,.\, 3^3 \,.\, 5$ et $1\,575 = 3^2 \,.\, 5^2 \,.\, 7$, leur p. g. c. d. : $45 = 3^2 \,.\, 5$ et leur p. p. c. m.: $9\,450 = 2 \,.\, 3^3 \,.\, 5^2 \,.\, 7$, il est aisé de voir que tout facteur de 270 comme tout facteur de 1 575 se retrouve une fois et une seule avec son exposant dans le p. g. c. d. ou le p. p. c. m. et de même pour 1575. On en conclut que : $270 \,.\, 1575 = 45 \,.\, 9\,450$.

Le lecteur établira sans peine la généralité de ce raisonnement qui conduit à l'énoncé : *le produit de deux nombres est égal au produit de leur p. g. c. d. par leur p. p. c. m.*

Exercices. — Nos **6, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 118.**

CHAPITRE III

—

FRACTIONS-RACINES

22. Fractions. — La notion de nombre entier, qui seule jusqu'à présent nous a suffi, peut s'appliquer à deux catégories de grandeurs bien distinctes. De tels nombres peuvent servir à compter les élèves d'une salle, les livres d'une bibliothèque, les arbres d'une allée,..... ou encore à évaluer un temps en heures, une distance en kilomètres, une somme en francs,..... ([1]).

Dans ce dernier cas, contrairement à ce qui se passe dans le premier, il est facile d'imaginer qu'une durée soit supérieure à 3 heures, mais inférieure à 4; qu'une distance soit comprise entre 7 et 8 kilomètres, la valeur d'un objet entre 2 et 3 francs. La notion de nombres entiers ne suffit plus ici. Nous allons la généraliser en supposant, par exemple, qu'il s'agisse de longueurs.

Supposons donc que nous voulions mesurer une longueur AB (*fig.* 5) avec une autre longueur MN prise pour unité (ici le demi-centimètre). Si nous portons cette unité plusieurs fois de suite sur AB, nous voyons que 7 fois MN donnent la longueur AC inférieure à AB, tandis que 8 fois MN donneraient AD supérieur à AB. La

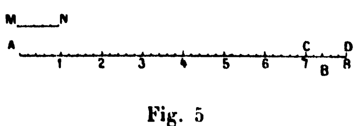


Fig. 5

([1]) Nous reprendrons cette distinction pour la préciser au début du chapitre suivant (**35**).

longueur AB ne peut être mesurée ni par l'entier 7 ni par l'entier 8.

Divisons alors l'unité en un certain nombre de parties égales, par exemple en 5 parties que nous appellerons des cinquièmes d'unité, et portons bout à bout ces nouvelles parties. Il en faut d'abord $5 \times 7 = 35$ pour couvrir la longueur AC. Il peut arriver que la longueur CB contienne un nombre exact de ces parties. Nous supposons que ceci ait lieu ici et que CB contienne deux de ces parties. AB contient dans ce cas 37 cinquièmes d'unités, et un tel renseignement permettra de retrouver toujours la longueur AB. Ce nombre 37 cinquièmes que l'on écrit $\frac{37}{5}$ est par définition la mesure de la longueur AB considérée. On l'appelle une fraction [1].

Une fraction est représentée par l'ensemble de deux nombres, dont l'un placé à la partie inférieure, et appelé dénominateur, indique en combien de parties égales on a divisé l'unité, et l'autre placé à la partie supérieure, et appelé numérateur, indique combien l'on prend de ces parties.

La façon même d'énoncer une fraction « 37 cinquièmes » rappelle d'ailleurs cette formation. Dans le cas des dénominateurs 2, 3, 4 on emploie les mots *demi*, *tiers*, *quart* : un demi, trois quarts, etc.

Il y a plusieurs remarques immédiates à faire sur ce qui précède. Si l'on prend un, deux, trois ou quatre cinquièmes d'unités, on aura des longueurs inférieures à MN (*fig.* 5), ou, si l'on veut, des nombres $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, inférieurs à l'unité ; $\frac{5}{5}$ re-

---

[1] Nous verrons plus loin (**291**) comment on peut effectuer pratiquement la décomposition de l'unité en un certain nombre de parties égales. Il suffit pour le moment de concevoir cette possibilité.

Nous avons supposé en outre dans l'exemple ci-dessus que le cinquième de l'unité était contenu un nombre exact de fois dans AB. Nous verrons (**36**) comment on peut éviter tout tâtonnement et savoir immédiatement quelle est la fraction de l'unité à prendre, dans le cas où il existe une telle fraction.

donne l'unité ; quant à $\frac{6}{5}, \frac{7}{5}, \ldots\ldots \frac{37}{5}$, ils correspondent à des longueurs supérieures à MN (*fig.* 6) : ce sont des nombres supérieurs à l'unité. Donc, *une fraction est inférieure, égale ou supérieure à l'unité, suivant que son numérateur est inférieur, égal ou supérieur à son dénominateur.* Si $a < b$, on a : $\frac{a}{b} < 1$; si $a = b$, on a : $\frac{a}{b} = 1$, et enfin si $a > b$, on a : $\frac{a}{b} > 1$.

Fig. 6

La mesure de la longueur AC est 7 ou $\frac{35}{5}$. On a donc : $7 = \frac{35}{5}$ puisque ces deux nombres mesurent la même longueur. *Une fraction est égale au quotient de son numérateur par son dénominateur quand cette division se fait exactement.* Si $a = mb$, on a : $\frac{a}{b} = m$ (**10**).

23. — Nous voyons encore sur cet exemple qu'une même longueur peut être mesurée de plusieurs façons différentes puisque $7 = \frac{35}{5} = \frac{21}{3} = \ldots$ De façon plus générale, prenons une fraction quelconque $\frac{37}{5}$ et divisons chacun des cinquièmes d'unité en 2 parties égales. MN comprend $2 . 5 = 10$ parties égales qui sont les dixièmes d'unité. La longueur AB contiendra $2 . 37 = 74$ de ces parties. Le nombre qui mesure AB peut donc être pris égal à $\frac{74}{10}$. On verrait de même que :

$$\frac{37}{5} = \frac{37 . 3}{5 . 3} = \frac{111}{15}, \text{ etc.}$$

On ne change pas la valeur d'une fraction en multipliant à la fois ses deux termes par un même nombre. Inversement d'ailleurs $\frac{111}{15} = \frac{74}{10} = \frac{37}{5}$: *on ne change pas la valeur d'une fraction en divisant à la fois ses deux termes par un diviseur*

commun. Effectuer une telle opération s'appelle *simplifier une fraction*. On aura la simplification la plus grande possible en prenant pour diviseur commun le plus grand de tous les diviseurs (**20**). Les deux termes de la nouvelle fraction sont alors premiers entre eux. On dit que cette fraction est *irréductible*.

Cette possibilité de mettre une même fraction sous une infinité de formes différentes permet de comparer deux ou plusieurs fractions pour savoir quelle est la plus grande, c'est-à-dire quelle est celle qui correspond à la plus grande longueur. Si nous prenons les fractions : $\frac{2}{5}$ et $\frac{3}{5}$, il s'agit dans les deux cas de cinquièmes d'unité et il est par suite visible que $\frac{3}{5}$ est supérieur à $\frac{2}{5}$. Une telle comparaison n'est plus immédiate pour des fractions telles que $\frac{3}{5}$ et $\frac{4}{7}$. Mais on peut remarquer que $\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 7} = \frac{21}{35}$ et $\frac{4}{7} = \frac{4 \cdot 5}{7 \cdot 5} = \frac{20}{35}$ et la comparaison des fractions ainsi obtenues montre que $\frac{21}{35}$ ou $\frac{3}{5}$ est la plus grande des deux.

On a pris, comme on le voit, un multiple commun $7.5 = 35$ des deux dénominateurs primitifs pour avoir le nouveau dénominateur. Effectuer une telle opération s'appelle *réduire les fractions au même dénominateur*. On voit que le dénominateur le plus simple que l'on puisse prendre est, d'après sa formation même, le plus petit commun multiple des dénominateurs ([1]).

Deux fractions ne peuvent être égales que si, dans cette réduction au même dénominateur, on trouve des numérateurs égaux : $\frac{4}{6}$ et $\frac{6}{9}$ sont égaux, car $\frac{4}{6} = \frac{4 \cdot 3}{6 \cdot 3} = \frac{12}{18}$ et $\frac{6}{9} = \frac{6 \cdot 2}{9 \cdot 2} = \frac{12}{18}$. Ceci

---

([1]) Ce procédé de réduction au même dénominateur pour la comparaison de deux ou plusieurs fractions est surtout avantageux en théorie. Dans la pratique il est plus commode de réduire les fractions à comparer en fractions décimales (**29**). On pourrait faire une remarque analogue au sujet de l'addition des fractions dans le cas ou l'on a plusieurs fractions de dénominateurs différents.

va nous permettre de préciser la notion d'égalité de deux fractions.

On forme toutes les fractions égales à une fraction donnée en prenant cette fraction sous sa forme irréductible et en multipliant ses deux termes par un même nombre entier d'ailleurs arbitraire.

En effet, d'après ce qui précède, les fractions ainsi formées sont égales à la fraction considérée. Vérifions qu'on les a toutes : soit en effet une fraction $\frac{a'}{b'}$ égale à la fraction irréductible $\frac{a}{b}$. L'égalité $\frac{a'}{b'} = \frac{a}{b}$ devient par la réduction au même dénominateur $\frac{a'b}{b'b} = \frac{ab'}{bb'}$ d'où l'on déduit $a'b = ab'$. Mais b divise ab' et est premier avec a ; il divise donc b' (**19**) et l'on a $b' = bq$ et par suite $a' = aq$ ce qui montre que $\frac{a'}{b'}$ s'obtient en multipliant les deux termes de $\frac{a}{b}$ par le nombre q.

24. Opérations sur les fractions. — L'addition et la soustraction des fractions se font immédiatement si l'on a soin de réduire ces fractions au même dénominateur, ce que l'on peut toujours faire : si, par exemple, on considère deux fractions $\frac{3}{5}$ et $\frac{4}{5}$, il est naturel, en supposant que ce soient les mesures de deux longueurs, de prendre la mesure de la somme des deux longueurs comme représentant la somme de ces deux fractions. Il est évident que cette somme est $\frac{7}{5}$:

$$\frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{3+4}{5} = \frac{7}{5}.$$

De même :

$$1 + \frac{2}{5} = \frac{5}{5} + \frac{2}{5} = \frac{7}{5}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

La soustraction donne lieu à des calculs analogues :

$$\frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{9}{12} - \frac{8}{12} = \frac{1}{12}$$

$$\left(3 + \frac{1}{2}\right) - \left(2 + \frac{3}{4}\right) = \frac{7}{2} - \frac{11}{4} = \frac{14}{4} - \frac{11}{4} = \frac{3}{4}$$

Pour ajouter (ou retrancher) deux fractions, on les réduit au même dénominateur, puis on ajoute (ou retranche) les numérateurs et l'on conserve pour dénominateur le dénominateur commun à ces deux fractions.

25. — La multiplication d'une fraction par un nombre entier peut être considérée comme une généralisation de l'idée d'addition. Multiplier $\frac{7}{5}$ par 4, c'est répéter 4 fois la fraction $\frac{7}{5}$; on a donc :

$$\frac{7}{5} \cdot 4 = \frac{7}{5} + \frac{7}{5} + \frac{7}{5} + \frac{7}{5} = \frac{7 \cdot 4}{5} = \frac{28}{5}.$$

On voit qu'il suffit de multiplier par 4 le numérateur.

En particulier, si l'on multiplie $\frac{7}{5}$ par 5, on trouve $\frac{7 \cdot 5}{5} = \frac{35}{5}$ qui n'est autre que le nombre entier 7. *Si l'on multiplie une fraction par son dénominateur, on obtient le numérateur de cette fraction.*

C'est là un résultat très important, qui permet en particulier de reprendre une définition déjà donnée pour la division (**10**). Nous avons vu que la division de a par b n'est pas toujours possible, si l'on veut trouver un nombre q tel que $a = b \cdot q$. Par exemple, on ne peut pas avec une telle définition diviser 7 par 5. Mais nous voyons que la fraction $\frac{7}{5}$ répond à cette question, puisque multipliée par 5 elle donne 7. Cette propriété fondamentale des fractions peut s'énoncer : *une fraction est le quotient de son numérateur par son dénominateur.*

Mais il faut bien remarquer que le sens actuel du mot « quotient de 7 par 5 » n'est pas le sens précédemment adopté dans

la recherche du quotient 1 et du reste 2 de la division de 7 par 5, division qui ne se fait pas exactement. Lorsqu'on veut distinguer ces deux sens, on dit que 1 est le *quotient approché à une unité près par défaut*, ou en abrégé le *quotient à une unité près de 7 par 5*, et que $\frac{7}{5}$ est le *quotient exact* de 7 par 5, ou le *rapport* de 7 à 5 (**37**). Dans le cas où la division se fait exactement, il n'y a aucun inconvénient à employer comme nous l'avons fait (**10**) la forme de fraction pour indiquer le quotient de ces nombres : $\frac{6}{3} = 2$.

On peut donner du quotient exact une représentation concrète en reprenant l'exemple des longueurs. Prenons une longueur AB égale à 7 fois l'unité MN (*fig.* 7), et cherchons à la partager en 5 parties égales. Il est facile de voir que si l'on divise MN en 5 parties égales, 7 de ces parties donnent la longueur AC qui est les $\frac{7}{5}$ de MN et $\frac{1}{5}$ de AB.

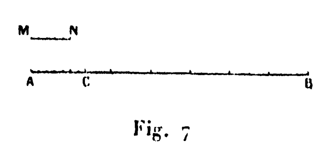


Fig. 7

Le même procédé s'étend à la division d'une fraction par un nombre entier. C'est ainsi que pour diviser la longueur $AC = \frac{7}{5}$ en 4 parties égales, on peut diviser en 4 l'un quelconque des 7 segments qui forment AC et prendre 7 de ces nouveaux segments. Si l'on remarque qu'il faudrait $5 . 4 = 20$ de ces mêmes segments pour retrouver l'unité MN, on voit que chacun d'eux est un vingtième d'unité ; la réunion de 7 de ces segments donne $\frac{7}{20}$ pour le quart de la longueur AC : *pour diviser une fraction par un nombre, on multiplie le dénominateur de la fraction par ce nombre*. Il y a d'ailleurs des cas où l'on peut diviser simplement le numérateur par ce nombre. Par exemple pour diviser $\frac{8}{5}$ par 4, il suffit visiblement de prendre la fraction $\frac{2}{5}$ d'ailleurs égale à $\frac{8}{5 . 4} = \frac{8}{20}$.

26. — Pour définir le produit d'un nombre entier, ou, plus généralement, d'une fraction par une fraction, il nous sera commode de raisonner sur un exemple. Supposons qu'un voyageur fasse 1 kilomètre 2 cinquièmes, ou, si l'on veut, $\frac{7}{5}$ de kilomètre par heure. Pour avoir le chemin parcouru par le voyageur en 2 heures, 3 heures,... il suffira de multiplier la fraction $\frac{7}{5}$ par 2, 3,... opération que nous avons appris à effectuer.

Il est alors naturel de considérer le chemin parcouru par le voyageur en une demi-heure, trois quarts d'heure, 7 quarts d'heure... comme représentant les produits de $\frac{7}{5}$ par $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{4}\ldots$ Cherchons le chemin parcouru en $\frac{7}{4}$ d'heure : en $\frac{1}{4}$ d'heure, le voyageur fait 4 fois moins de chemin qu'en une heure ; il faut donc diviser $\frac{7}{5}$ par 4, ce qui donne comme on l'a vu $\frac{7}{5 \cdot 4}$, et en $\frac{7}{4}$ d'heure, il fera 7 fois plus de chemin que dans $\frac{1}{4}$ d'heure, soit $\frac{7 \cdot 7}{5 \cdot 4} = \frac{49}{20}$ de kilomètre. On est ainsi conduit à la définition suivante que nous adopterons :

Pour multiplier l'une par l'autre deux fractions, on prend une nouvelle fraction ayant pour numérateur le produit des numérateurs et pour dénominateur le produit des dénominateurs.

Si dans l'exemple précédent on avait pris les $\frac{7}{4}$ de $\frac{7}{5}$, on aurait été conduit au même résultat, car, pour prendre les $\frac{7}{4}$ d'un nombre, on peut en prendre d'abord le quart, ce qui revient à le diviser par 4, puis les $\frac{7}{4}$, c'est-à-dire multiplier le résultat précédent par 7.

On voit, d'après la définition donnée, que le produit de deux facteurs ne change pas quand on intervertit l'ordre des facteurs. Nous laissons au lecteur le soin d'étendre aux fractions la plupart des propriétés analogues déjà établies pour les nombres entiers (**3** et suivants).

Pour définir la division d'une fraction par une autre fraction, on pourrait, comme nous venons de le faire, raisonner sur un exemple, mais il sera plus commode de considérer la division comme une opération inverse de la multiplication. *Diviser une fraction par une autre, c'est chercher une nouvelle fraction qui, multipliée par la seconde, reproduise la première.*

Le lecteur en déduira la règle pratique : *pour diviser une fraction par une autre, on multiplie la première fraction par la seconde renversée* ; le quotient de $\frac{7}{5}$ par $\frac{2}{3}$ est : $\frac{7}{5} \cdot \frac{3}{2} = \frac{21}{10}$. Nous nous bornerons à vérifier sur l'exemple considéré que le produit de $\frac{7 \cdot 3}{5 \cdot 2}$ par $\frac{2}{3}$ est bien $\frac{7}{5}$; on a : $\frac{7 \cdot 3}{5 \cdot 2} \times \frac{2}{3} = \frac{7 \cdot 3 \cdot 2}{5 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{7}{5}$.

On établirait sans peine que, pour toutes les opérations ainsi définies (addition, soustraction, multiplication, division), le résultat de l'opération ne change pas si l'on remplace deux ou plusieurs fractions par des fractions équivalentes.

27. Fractions décimales. — Une catégorie très importante de fractions est celle des fractions décimales ou fractions dont le dénominateur est 10, ou une puissance de 10 : 100, 1 000,...

Ces fractions sont à peu près les seules employées dans la pratique : on ne parle jamais d'un tiers ou d'un septième de mètre, mais bien d'un dixième de mètre ou décimètre, d'un centième de mètre ou centimètre, etc... De même pour les litres, les kilogrammes, les francs... Une des principales raisons de cette importance des fractions décimales est l'emploi de la notation particulière suivante : *on transforme une fraction décimale en nombre décimal en séparant sur la droite du numérateur par une virgule autant de chiffres qu'il y a de zéros au dénominateur* :

$$\frac{379}{10} = 37{,}9 \quad \frac{42\,734}{1\,000} = 42{,}734 \quad \frac{3}{10} = 0{,}3 \quad \frac{17}{100\,000} = 0{,}00017.$$

C'est une généralisation de la notation employée pour les entiers. Ici encore tout chiffre placé à la droite d'un autre représente des unités dix fois plus faibles. De sorte que, dans le

nombre décimal 42,734, le 7 représente des dixièmes d'unité, le 3, des dixièmes de dixièmes, c'est-à-dire des centièmes, etc.. On peut d'ailleurs mettre ceci en évidence en écrivant :

$$\frac{42\,734}{1\,000} = \frac{40\,000}{1\,000} + \frac{2\,000}{1\,000} + \frac{700}{1\,000} + \frac{30}{1\,000} + \frac{4}{1\,000}$$

$$= 40 + 2 + \frac{7}{10} + \frac{3}{100} + \frac{4}{1\,000}.$$

La virgule n'a d'autre rôle que d'indiquer où se trouvent les unités ; 42 est la *partie entière* et 734 la *partie décimale*. Ici, comme pour les nombres entiers, on met des zéros à la place des unités manquantes ; on a d'ailleurs l'habitude, dans le cas où il n'y a pas de partie entière, de mettre un zéro avant la virgule pour indiquer la place des unités.

La transformation inverse d'un nombre décimal en fraction décimale résulte de ce qui précède :

$$42,734 = \frac{42\,734}{1\,000} \qquad 0,00017 = \frac{17}{100\,000}.$$

Tout zéro placé à la droite d'un nombre décimal n'en change pas la valeur :

$$0,0001700 = \frac{1\,700}{10\,000\,000} = \frac{17}{100\,000} = 0,00017.$$

La comparaison de deux nombres décimaux est immédiate. Pour comparer 0,03 et 0,0299, il suffit de remarquer que les deux fractions décimales correspondantes peuvent s'écrire $\frac{300}{1\,000}$ et $\frac{299}{1\,000}$ et par suite que la première est la plus grande. Alors qu'il est impossible de comparer sans calculs des fractions ordinaires : $\frac{3}{5}$; $\frac{41}{68}$; $\frac{13}{20}$, on peut toujours classer immédiatement des fractions décimales en nombre quelconque.

28. — Les opérations sur les nombres décimaux sont bien connues et nous rappellerons simplement les règles pratiques ;

leur justification se fait en substituant les fractions décimales aux nombres décimaux : par exemple :

$$0,3 \times 0,04 = \frac{3}{10} \cdot \frac{4}{100} = \frac{12}{1\,000} = 0,012.$$

L'addition de plusieurs nombres décimaux se fait comme une addition ordinaire, après avoir disposé les nombres les uns au-dessous des autres de façon à ce que toutes les virgules soient dans une même colonne. On recopie une virgule au résultat au-dessous des virgules déjà inscrites. On ramène exactement de la même manière la soustraction de deux nombres décimaux à la soustraction de deux nombres entiers.

On multiplie (ou on divise) un nombre décimal par 10, 100, 1 000, ... *en déplaçant vers la droite (ou vers la gauche) la virgule de* 1, 2, 3, ... *rangs.*

$$0,012 \times 100 = 1,2 \qquad 0,012 \times 10\,000 = 120.$$

Pour multiplier deux nombres décimaux l'un par l'autre, on les multiplie sans tenir compte de la virgule, mais on sépare ensuite au produit autant de chiffres décimaux qu'il y en a en tout dans les deux facteurs.

Pour diviser deux nombres décimaux l'un par l'autre, on les multiplie tous deux par une même puissance de 10, *de façon à les rendre entiers, et l'on retrouve ainsi le cas de la division de deux nombres entiers.*

Pour diviser 0,21 par 0,003, on se ramène à la division de 210 par 3, ce qui donne 70. Pour diviser 0,017 par 0,003, on divise de même 17 par 3, division qui donne 5 comme quotient approché à une unité près, et comme quotient exact $\frac{17}{5}$. Nous allons voir qu'on peut d'ailleurs dans certains cas mettre sous forme décimale le quotient de deux nombres décimaux.

29. Convertir une fraction ordinaire en fraction décimale. — Le problème que nous nous proposons est le suivant : étant donnée une fraction ordinaire, trouver une fraction décimale qui lui soit égale. Par exemple on a :

$\frac{17}{5} = \frac{17 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{34}{10} = 3{,}4$. Une telle transformation n'est pas toujours possible comme nous le verrons, et l'on se borne alors à chercher le plus grand nombre de dixièmes, de centièmes, de millièmes, ... contenus dans la fraction considérée. Si l'on sait que la fraction $\frac{17}{7}$ est plus grande que la fraction décimale $\frac{2\,428}{1\,000}$ et plus petite que $\frac{2\,429}{1\,000}$, on dira que $\frac{2\,428}{1\,000}$ est la *valeur approchée à* $\frac{1}{1\,000}$ *près par défaut*, ou encore la *valeur approchée à* $\frac{1}{1\,000}$ *près* de $\frac{17}{7}$, et $\frac{2\,429}{1\,000}$ la *valeur approchée à* $\frac{1}{1\,000}$ *près par excès*. Remarquons que, en particulier, 2 est le quotient à une unité près par défaut de 17 par 7, comme nous l'avons déjà dit. Les nouvelles définitions sont donc une généralisation de celles qui ont déjà été employées pour la division. Nous allons voir de plus qu'on en revient toujours au cas du quotient à une unité près :

Cherchons en effet la valeur à $\frac{1}{1\,000}$ près de $\frac{17}{7}$. Si a est le numérateur cherché, on doit avoir :

$$\frac{a}{1\,000} \leqslant \frac{17}{7} < \frac{a+1}{1\,000}.$$

Multiplions par 1 000, puis par 7, les divers termes de ces inégalités ; on a successivement :

$$a \leqslant \frac{17\,000}{7} < a + 1$$
$$7a \leqslant 17\,000 < 7(a+1)$$

inégalités qui expriment, comme on l'a vu (**10**), que a est le quotient à une unité près par défaut de 17 000 par 7. Effectuons cette division, on trouve : $a = 2\,428$. La valeur cherchée est donc par défaut $\frac{2\,428}{1\,000} = 2{,}428$, ou par excès : $\frac{2\,429}{1\,000} = 2{,}429$.

30. — Si l'on veut la valeur de $\frac{17}{7}$ à $\frac{1}{100}$ près seulement, on pourra remarquer que $\frac{17}{7}$ étant compris entre $\frac{2\,428}{1\,000}$ et $\frac{2\,429}{1\,000}$ est compris par suite entre $\frac{2\,420}{1\,000}$ et $\frac{2\,430}{1\,000}$ ou $\frac{242}{100}$ et $\frac{243}{100}$; donc $\frac{242}{100} = 2{,}42$ est la valeur de $\frac{17}{7}$ à $\frac{1}{100}$ près. De même $\frac{24}{10} = 2{,}4$ en est la valeur à $\frac{1}{10}$ près et $\frac{2}{1} = 2$ la valeur à une unité près. Les divers calculs à faire sont les divisions de 17 000 par 7 ; de 1700 par 7 ; de 170 par 7 ou enfin de 17 par 7 suivant les cas. Si donc on effectue, comme ci-contre, la division de 17 par 7 en abaissant chaque fois un zéro à la droite du reste, les quotients successifs : 2 ; 2,4 ; 2,42 ; ... représentent les valeurs de $\frac{17}{7}$ à une unité, un dixième, un centième... près. On écrit quelquefois :

```
17  |7
 30 |2,4285714 28..
  20
   60
    40
     50
      10
       30
        20
         60
          4.
```

$$\frac{17}{7} = 2{,}428571428....$$

Dans l'exemple ci-dessus, les restes successifs 3, 2, 6, 4,... étant inférieurs à 7 doivent se reproduire indéfiniment et dans le même ordre. Il en est de même par suite des chiffres du quotient : 428571 428571..... C'est ce que l'on exprime parfois en disant que le nombre décimal 2,428571428.. supposé illimité est *périodique* ; 428571 est la *période*. Il est aisé de voir que, dans tous les cas où la division ne se termine pas, le quotient est périodique.

En s'appuyant sur les propriétés des fractions équivalentes, le lecteur pourra démontrer que : *la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fraction ordinaire supposée irréductible soit égale à une fraction décimale est que son dénominateur ne contienne pas d'autres facteurs premiers que* 2 *ou* 5.

Ce problème de la conversion exacte ou approchée d'une fraction ordinaire en fraction décimale se présente fréquemment dans la pratique. Si par exemple un caissier doit partager

460 francs entre 9 personnes, il doit donner à chacun

$$\frac{460}{9} = 51^{f},1111\ \ldots$$

En réalité il donnera à chaque personne $51^{f},11$, le centime étant la plus petite unité monétaire ou même $51^{f},10$; si l'on doit partager 43 mètres de drap en 8 morceaux d'égale longueur, chaque morceau devrait avoir : $\frac{43}{8} = 5^{m},375$ et dans la pratique on prendra $5^{m},37$, le centimètre étant la plus petite unité de longueur pour de telles mesures (**47**) ; etc... Comme on le voit, un très petit nombre de décimales suffisent dans la plupart des problèmes que l'on a pratiquement à résoudre (**52** et suivants).

Le procédé qui consiste à chercher une valeur approchée d'un nombre que l'on ne peut pas avoir exactement est d'un usage très fréquent en Mathématiques. On l'emploie dans un grand nombre de calculs d'Analyse. Mais même dans les mathématiques élémentaires nous le retrouverons dans la recherche de la racine carrée (**33**), en géométrie dans le calcul du rapport de la longueur d'une circonférence à son diamètre (**162**), etc. ....

31. Racine carrée. — Nous avons dit (**8**) qu'on appelle carré d'un nombre le produit de ce nombre par lui-même :

$$3^2 = 3\ .\ 3 = 9 \qquad 17^2 = 17\ .\ 17 = 289.$$

Une telle définition s'étend naturellement aux fractions ordinaires et décimales :

$$\left(\frac{4}{7}\right)^2 = \frac{4}{7}\cdot\frac{4}{7} = \frac{4^2}{7^2} = \frac{16}{49} \qquad 1,7^2 = 1,7 \times 1,7 = 2,89.$$

Inversement, étant donné un nombre entier ou fractionnaire, *extraire la racine carrée* de ce nombre, c'est trouver le nombre entier ou fractionnaire dont il est le carré. On emploie pour une telle opération le signe « radical » : $\sqrt{\ }$.

$$\sqrt{9} = 3 \qquad \sqrt{289} = 17 \qquad \sqrt{\frac{16}{49}} = \frac{4}{7} \qquad \sqrt{2,89} = 1,7$$

Le carré d'une fraction irréductible $\frac{a}{b}$ est $\frac{a^2}{b^2}$ qui est aussi irréductible. Donc le carré d'une fraction irréductible n'est jamais un entier. Inversement si un nombre entier, 2 par exemple, n'a aucune racine carrée entière, il n'a pas davantage de racine fractionnaire : *il y a des nombres qui n'ont pas de racine carrée* au sens précédent du mot.

Les nombres entiers qui ont des racines carrées entières s'appellent des *carrés parfaits*. Les 20 plus petits carrés parfaits sont donnés par la liste ci-dessous, qu'il est bon de savoir par cœur (¹) :

Nombres :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Carrés :	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
Nombres :	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Carrés :	121	144	169	196	225	256	289	324	361	400.

Il y a, comme on le voit, très peu de nombres qui soient carrés parfaits. Un entier quelconque ne sera pas en général dans cette liste, même si on la suppose prolongée indéfiniment : 22 par exemple est compris entre 16 ou 4^2 et 25 ou 5^2. Ceci veut dire que le plus grand entier dont le carré est inférieur à 22 est 4. Par analogie avec une définition concernant la division (**10**), on dit que 4 est la *racine carrée à une unité près par défaut* de 22 ; la racine carrée *à une unité près par excès* est 5. On dit quelquefois de façon abrégée : la racine carrée de 22 est 4. La différence entre 22 et le carré de 4 s'appelle le *reste* : $22 - 16 = 6$.

Si a est la racine carrée de A, on peut écrire d'après ce qui précède :

$$a \leqslant A < (a+1)^2.$$

Le reste r est donné par :

$$r = A - a^2.$$

(¹) On trouvera à la fin du volume les carrés et les racines carrées des 100 premiers nombres.

Si l'on remarque que $(a+1)^2$ est égal à a^2+2a+1 (**9**), on voit que l'inégalité $A < a^2+2a+1$ entraîne $r < 2a+1$, que l'on peut encore écrire : $r \leqslant 2a$.

32. — L'extraction de la racine carrée a d'un nombre donné A est une opération connue du lecteur et au sujet de laquelle nous nous bornerons à rappeler quelques points importants sans donner leurs démonstrations.

Le nombre des chiffres de la racine a est donné par le nombre des tranches de deux chiffres de A. La racine carrée de 22 71 58 a 3 chiffres, ou, si l'on veut, est comprise entre 100 et 1 000. Il en est de même pour la racine carrée de 7 43 73.

Le nombre des dizaines de la racine a est la racine carrée du nombre des centaines de A. *De même le nombre des centaines est la racine carrée du nombre des dizaines de mille*, etc. Si par exemple 272 est la racine carrée de 7 43 73, celle de 7 43 est 27 et celle de 7 est 2.

Ces remarques permettent d'extraire la racine carrée d'un nombre quelconque. Nous indiquerons sur un exemple la marche à suivre. Pour avoir la racine carrée a de 74 373, on décompose ce nombre en tranches de deux chiffres : 7 43 73. Le chiffre des centaines de a est la racine carrée de 7, soit 2. A la suite du reste correspondant

7 43 73	272		
3 43	48	47	542
3 29	8	7	2
14 73	384	329	1084
10 84			
3 89			

$7-4=3$, on abaisse la tranche suivante 43, ce qui revient à dire que $743-20^2=343$. On sépare le dernier chiffre 3 et l'on divise 34 par le double 4 du 2 déjà trouvé à la racine, on obtient 8. C'est le second chiffre de a, ou un chiffre trop fort. On essaie 8 en calculant $48 \times 8 = 384$. Ce nombre étant supérieur à 343, c'est que 8 ne convient pas. L'essai de 7 donne $47 \times 7 = 329$ qui est inférieur à 343. La racine de 743 est alors 27, le reste étant $343-329=14$; on a d'ailleurs $343-329=743-27^2$. On abaisse de même la tranche suivante 73 ce qui donne 1473. On divise 147 par le double de la racine déjà trouvée : 54 (d'ailleurs 54 est la somme de deux

nombres déjà écrits : 47 et 7). Cette division donne 2 qui essayé convient, car 542 × 2 = 1 084 nombre inférieur à 1 473. La racine est 272 et 1 473 — 1 084 = 389 est le reste d'ailleurs inférieur au double de la racine : 544 (**31**) ; on a comme précédemment 1 473 — 1 084 = 74 373 — 272^2.

33. — Un nombre n'ayant pas en général de racine carrée exacte, on est amené, comme pour la division, à définir la racine carrée à $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$,... près, c'est-à-dire à chercher le plus grand nombre de dixièmes ou de centièmes dont le carré soit inférieur au nombre donné. Si l'on sait que le carré de 1,41 est 1,9881 et celui de 1,42 est 2,0164, on pourra dire que 1,41 est à $\frac{1}{100}$ près la racine carrée par défaut de 2, ou simplement la racine carrée à $\frac{1}{100}$ près ; 1,42 est avec la même approximation la racine carrée par excès.

La recherche d'une telle racine est analogue à celle d'une racine carrée à une unité près : si l'on veut avoir la racine à $\frac{1}{100}$ près de 2, il faudra trouver un entier a tel que l'on ait :

$$\left(\frac{a}{100}\right)^2 \leqslant 2 < \left(\frac{a+1}{100}\right)^2$$

Multiplions par $100^2 = 1\ 00\ 00$ les termes de ces inégalités :

$$a^2 \leqslant 2\ 00\ 00 < (a+1)^2$$

qui exprime que a est la racine carrée à une unité près de 2 00 00. On extrait cette racine qui est 141. La racine carrée de 2 à un centième près est alors $\frac{141}{100} = 1,41$.

Pratiquement, on dispose l'opération comme à la page suivante, en abaissant des tranches de deux zéros pour chaque nouvelle décimale à obtenir.

On opère de façon analogue pour chercher la racine carrée d'un nombre décimal. Si l'on cherche par exemple à $\frac{1}{100}$ près

la racine carrée de 4,857, la première tranche à abaisser sera 85 ; la seconde sera 70. La racine est 2,20.

2	1,41	
100	24	281
96	4	1
400	96	281
281		
119		

4,857	2,20	
0 85	42	44
84	2	
170	84	

34. Racines cubiques, quatrièmes,... — Les définitions de la *racine cubique*, de la *racine quatrième*, ... d'un nombre se déduisent des définitions du cube, de la quatrième puissance, ... (**8**), comme celle de la racine carrée se déduit de la définition du carré d'un nombre. C'est ainsi que les égalités :

$$3^3 = 27 \qquad 2,6^3 = 17,576 \qquad \left(\frac{3}{7}\right)^4 = \frac{81}{2\,401}$$

peuvent s'écrire :

$$\sqrt[3]{27} = 3 \qquad \sqrt[3]{17,576} = 2,6 \qquad \sqrt[4]{\frac{81}{2\,401}} = \frac{3}{7}.$$

En général, le nombre considéré n'a pas de racine exacte, et l'on définit, comme pour la racine carrée, *la racine à* $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$,... *près par défaut ou par excès* d'un tel nombre. C'est ainsi que, pour avoir la racine cubique de 2 à $\frac{1}{100}$ près, on cherche un nombre a tel que l'on ait :

$$\left(\frac{a}{100}\right)^3 \leqslant 2 < \left(\frac{a+1}{100}\right)^3$$

inégalités qui se ramènent à :

$$a^3 \leqslant 2\ 00\ 00\ 00 < (a+1)^3$$

et l'on voit que a est la racine cubique à une unité près de 2 000 000, soit 125. La racine cherchée est 1,25.

Les calculs peuvent s'effectuer à l'aide de tables numéri-

ques [1] suffisamment étendues, ou par des méthodes de tâtonnements. On peut aussi employer des règles analogues à celle qui nous a servi pour la racine carrée, mais elles conduisent à des calculs compliqués.

Aucune de ces méthodes ne présente d'ailleurs d'intérêt pratique, car nous verrons que l'emploi des *logarithmes* (**129**) permet d'effectuer presque immédiatement tous les calculs d'élévation aux puissances ou d'extractions de racines.

Exercices. — N°s 10, 11, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 133.

---

[1] On trouvera à la fin du volume les cubes des 100 premiers nombres.

CHAPITRE IV

—

MESURE DES GRANDEURS

35. Mesure des grandeurs. — Les grandeurs que l'on peut avoir à comparer dans la pratique sont, comme nous l'avons déjà dit (**21**), de natures très différentes.

Certaines d'entre elles sont formées d'objets tous identiques, ou, plus exactement, d'objets que l'on range sous la même dénomination. L'unité est l'un de ces objets. Ce cas se présente si l'on compte les arbres d'une allée, les livres d'une bibliothèque, les habitants d'une ville. Ceci ne veut pas dire d'ailleurs que les arbres de l'allée soient identiques, pas plus que les livres de la bibliothèque, ou les habitants de la ville. Les calculs sur de telles grandeurs reposent simplement sur la notion du nombre entier.

Mais il y a d'autres grandeurs, comme les longueurs, les poids ou les températures, appelées parfois *grandeurs continues*, par opposition aux précédentes qui sont des *grandeurs discontinues*. Toutes ces grandeurs continues ne présentent pas d'ailleurs le même caractère. On n'ajoute pas deux températures comme on ajoute deux longueurs ou deux poids. Nous nous bornerons aux grandeurs les plus usuelles : longueurs, surfaces, volumes, poids, monnaies, angles, temps,... pour lesquelles on sait ce que c'est que deux grandeurs égales ou inégales, que la somme ou la différence de deux de ces grandeurs, et pour

lesquelles on conçoit l'existence d'une grandeur 2, 3, 4, 5,... fois plus grande ou plus petite qu'une grandeur donnée.

Pour mesurer de telles grandeurs, on prend de façon arbitraire une grandeur fixe de même espèce, qui sert de terme de comparaison ou d'*unité* ; ce sera par exemple le mètre pour les longueurs, le franc pour les monnaies (**46** et suivants), etc... On cherche combien de fois cette grandeur-unité est contenue dans la grandeur donnée. Il est rare qu'elle y soit contenue un nombre entier de fois. Dans la pratique, on cherchera combien la grandeur considérée contient de dixièmes d'unité, puis de centièmes. Un ouvrier dira que la largeur d'une pièce est de $3^{m},83$, sans se préoccuper de savoir si le nombre décimal 3,83 est rigoureusement exact. De même dans le commerce, on dit souvent que le poids d'un objet est de $7^{kg},850$ quand ce poids est compris entre $7^{kg},850$ et $7^{kg},860$, ce renseignement étant habituellement assez précis pour l'usage qu'on en veut faire. Les nombres décimaux permettent de faire toutes les mesures courantes.

36. — Théoriquement, on ne peut pas se borner à ce qui précède. Si l'on veut mesurer une longueur AB (*fig.* 8) en prenant comme unité une longueur MN, nous savons (**21**) que, si l'on trouve un segment contenu un nombre exact de fois dans MN et dans AB, la longueur de AB sera exprimée par une fraction. Cherchons un tel segment, ou, comme on dit, une telle *commune mesure*. Pour cela, après avoir porté autant de fois que possible MN sur AB, en AD, DE, EC, on porte CB sur MN en MP ; puis PN sur CB en CF, FG ; etc. Admettons pour fixer les idées que GB porté sur PN y soit continu trois fois exactement ; l'opération est alors terminée : GB est la commune mesure cherchée. Ce segment est contenu $3 + 3 + 1 = 7$ fois dans CB ; $7 + 3 = 10$ fois dans MN et enfin $10 + 10 + 10 + 7 = 37$ fois dans AB. Donc AB est les $\frac{37}{10}$ de

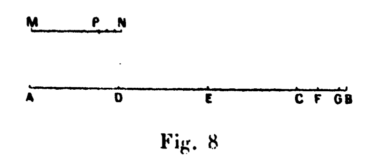


Fig. 8

MN, et comme MN est l'unité, AB a pour mesure : $\frac{37}{10} = 3{,}7$.

Le lecteur établira sans peine que l'on arrive ainsi, dans tous les cas où l'opération se termine, à avoir sous forme irréductible la fraction cherchée.

On démontre d'ailleurs qu'une telle commune mesure n'existe pas toujours : les deux grandeurs considérées sont dites alors *incommensurables* [1]. Nous supposerons que ce cas ne se présente jamais dans les mesures que nous aurons à considérer. Dans la pratique cette question n'a pas une grande importance puisqu'on se borne à un très petit nombre de décimales.

37. Rapports. — Prenons maintenant deux longueurs quelconques AB, CD, (*fig.* 9), l'unité étant MN. Les mesures respectives de AB et CD seront par exemple $\frac{37}{10}$ et $\frac{5}{2}$. Nous pouvons réduire ces deux fractions au même dénominateur en posant $\frac{5}{2} = \frac{25}{10}$. Mais on voit alors que le 37me de AB est contenu 25 fois dans CD ; ou encore, si l'on veut, que la mesure de CD en prenant AB pour unité est $\frac{25}{37}$, résultat qui ne dépend évidemment que des longueurs de AB et CD.

M N

A B

C D

Fig. 9

On appelle rapport de deux grandeurs P *et* Q *de même espèce le quotient des nombres p et q qui les mesurent, quand on prend pour unité une grandeur quelconque de même espèce.* On le représente par la notation $\frac{p}{q}$ analogue à celle des fractions, mais dans laquelle p et q peuvent être des fractions ordinaires ou décimales.

---

(1) On verra en géométrie (**251**) que la diagonale du carré de côté 1 a pour longueur $\sqrt{2}$. Or il n'y a aucun nombre entier ou fractionnaire dont le carré soit égal à 2 (**31**). Donc ces deux longueurs n'admettent aucune commune mesure et $\sqrt{2}$ est un nombre incommensurable.

Ici le rapport des longueurs CD et AB est $\dfrac{\frac{5}{2}}{\frac{37}{10}}$ quotient de deux fractions ordinaires. Ce rapport est égal à :

$$\frac{5}{2} \times \frac{10}{37} = \frac{50}{74} = \frac{25}{37} = 0{,}675675\ldots$$

résultat indépendant, comme on l'a vu, de l'unité choisie :

Le rapport de deux grandeurs de même espèce ne dépend pas du choix de l'unité. C'est en particulier la mesure de l'une des grandeurs quand on prend l'autre pour unité.

Il faut bien comprendre la signification de cette notion de rapport qui est des plus importantes pour la mesure des grandeurs, et par suite pour les applications pratiques de l'Arithmétique. Si, par exemple, on dit que le rapport des poids de deux corps est $\frac{3}{1}$ ou 3, cela veut dire que le poids du second corps est trois fois plus grand que celui du premier, et, dans ce cas très simple, le lecteur verra aisément que ce résultat ne dépend pas de l'unité de poids, qui peut être le kilogramme, le gramme, ou toute autre quantité. Ce nombre 3 exprime simplement le résultat de la comparaison des poids des deux corps.

Si d'ailleurs le poids de l'un des deux corps est triple de celui de l'autre, le poids de ce dernier est le tiers de celui du premier. Le résultat de la comparaison est ici le rapport $\frac{1}{3}$. Deux rapports tels que $\frac{p}{q}$ et $\frac{q}{p}$ sont dits *inverses*. On déduit donc de ceci que : *le rapport d'une grandeur* P *à une grandeur* Q *est inverse du rapport de la grandeur* Q *à la grandeur* P.

38. — Un rapport se présente, comme on l'a vu, sous la forme du quotient exact de deux nombres p et q, entiers, frac-

tionnaires ou décimaux ; par exemple :

$$\frac{\frac{5}{2}}{\frac{37}{10}} \qquad \frac{\frac{7}{9}}{1} \qquad \frac{2,34}{3,9}$$

sont des rapports.

Toutes les règles de calcul établies pour les fractions se conservent ici pour les rapports. C'est ainsi que l'on a l'énoncé :

Un rapport $\frac{a}{b}$ *ne change pas quand on multiplie ou qu'on divise à la fois ses deux termes par un même nombre :* $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$.

Prenons le cas le plus général en supposant que a, b, c sont des fractions ordinaires : $a = \frac{\alpha}{\alpha'}$; $b = \frac{\beta}{\beta'}$; $c = \frac{\gamma}{\gamma'}$. On a :

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{\alpha}{\alpha'}}{\frac{\beta}{\beta'}} = \frac{\alpha}{\alpha'} \cdot \frac{\beta'}{\beta} = \frac{\alpha \cdot \beta'}{\alpha' \cdot \beta}$$

et d'autre part :

$$\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{\frac{\alpha}{\alpha'} \cdot \frac{\gamma}{\gamma'}}{\frac{\beta}{\beta'} \cdot \frac{\gamma}{\gamma'}} = \frac{\frac{\alpha \cdot \gamma}{\alpha' \cdot \gamma'}}{\frac{\beta \cdot \gamma}{\beta' \cdot \gamma'}} = \frac{\alpha \cdot \gamma \cdot \beta' \cdot \gamma'}{\alpha' \cdot \gamma' \cdot \beta \cdot \gamma} = \frac{\alpha \cdot \beta'}{\alpha' \cdot \beta} = \frac{a}{b}$$

On établirait de même que :

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}}$$

On démontre par des procédés analogues les propriétés qui suivent.

On peut multiplier un rapport par un nombre en multipliant son numérateur par ce nombre, ou encore en divisant son dénominateur par ce nombre :

$$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b} = \frac{a}{\frac{b}{c}}$$

On peut diviser un rapport par un nombre en divisant son numérateur par ce nombre, ou multipliant son dénominateur par ce nombre :

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{\frac{a}{c}}{b} = \frac{a}{b \cdot c}$$

Dans la pratique on ramène le plus souvent un rapport à une fraction :

$$\frac{\frac{5}{2}}{\frac{37}{10}} = \frac{5 \cdot 10}{2 \cdot 37} = \frac{25}{37} \qquad \frac{\frac{7}{9}}{1} = \frac{7}{9} \qquad \frac{2{,}34}{3{,}9} = \frac{234}{390} = \frac{3}{5}$$

39. Proportions. — *On appelle proportion l'égalité de deux rapports.* Les deux rapports que l'on considère peuvent d'ailleurs concerner des grandeurs de natures différentes. Prenons deux barres de fer : si la première est une fois et demie plus longue et une fois et demie plus lourde que l'autre, nous dirons que le rapport de leurs longueurs $\frac{3}{2}$ est égal au rapport de leurs poids. C'est simplement la constatation d'une égalité numérique qui se réduit ici à $\frac{3}{2} = \frac{3}{2}$. De même : $\frac{4}{6} = \frac{0{,}6}{0{,}9}$ est une proportion, chaque rapport étant égal à $\frac{2}{3}$.

Prenons une proportion sous la forme : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; les nombres a, b, c, d sont les *termes* de la proportion ; a et d sont les *extrêmes* et b et c les *moyens*.

Nous allons indiquer rapidement les principales propriétés des proportions, propriétés qui nous serviront ultérieurement, par exemple en Géométrie (Chap. IV, **240** et suivants).

Dans toute proportion le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.

Si, en effet, on multiplie les deux rapports de la proportion

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ par le produit bd des dénominateurs, on trouve :

$$\frac{a \,.\, b \,.\, d}{b} = \frac{c \,.\, b \,.\, d}{d}$$

ou $a \,.\, d = b \,.\, c$.

Réciproquement, si quatre nombres a, b, c, d sont tels que l'on ait : $a \,.\, d = b \,.\, c$, en divisant les deux termes de cette égalité par $b \,.\, d$, on en déduit la proportion : $\frac{a \,.\, d}{b \,.\, d} = \frac{b \,.\, c}{b \,.\, d}$ ou : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

On peut dans une proportion : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ *échanger entre eux de façon quelconque les quatre termes, pourvu que les termes a et d soient à la fois les deux extrêmes ou les deux moyens.* Prenons en effet deux des proportions que l'on peut former : $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ et $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$; elles sont identiques, puisqu'elles sont toutes deux équivalentes à l'égalité $a \,.\, d = b \,.\, c$.

Remarquons que si dans la proportion $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, a et b sont des grandeurs de même espèce, il n'en est pas forcément de même dans toutes les proportions que l'on peut en déduire. Ceci n'a pas lieu, par exemple, pour $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$. On convient néanmoins d'appeler encore rapports les quotients $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{d}$, en ne considérant que les valeurs numériques de a, b, c, d, abstraction faite des grandeurs dont elles représentent les mesures.

40. — *Si dans une proportion on ajoute à chaque numérateur son dénominateur, on a encore une proportion.* La proportion : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ entraîne en effet : $\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$, ou $\frac{a + b}{b} = \frac{c + d}{d}$. De façon analogue, on peut écrire : $m.\frac{a}{b} + n = m.\frac{c}{d} + n$ ou $\frac{ma + nb}{b} = \frac{mc + nd}{d}$. De même si $m.\frac{a}{b}$ est supérieur à n, on

peut déduire de la proportion considérée : $m.\frac{a}{b} - n = m.\frac{c}{d} - n$ ou : $\frac{ma - nb}{b} = \frac{mc - nd}{d}$.

Etant donnés deux rapports égaux, on forme un nouveau rapport égal aux deux premiers en ajoutant les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux. De l'égalité $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ on déduit : $\frac{a}{b} = \frac{a + c}{b + d}$. En effet, si dans ces deux proportions on échange les extrêmes, ce qui est permis, on a les proportions : $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$ et $\frac{b + d}{b} = \frac{a + c}{a}$, équivalentes d'après ce qui précède. On établirait de même les proportions : $\frac{a}{b} = \frac{a - c}{b - d}$; $\frac{a}{b} = \frac{ma + nc}{mb + nd}$, etc....

Il arrive parfois que, dans une proportion, on connaisse tous les termes sauf l'un d'eux qui s'appelle alors une *quatrième proportionnelle* aux trois autres. Si l'on remarque que cette proportion revient à $a \,.\, d = b \,.\, c$, on voit que chaque terme se calcule immédiatement en fonction des trois autres. Si le terme inconnu est a, on divise les deux membres de l'égalité par d : $a = \frac{b \,.\, c}{d}$. Si c'est b que l'on cherche, on les divise par c : $b = \frac{a \,.\, d}{c}$, etc...

Si les deux moyens sont égaux, dans une proportion comme : $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, en écrivant que le produit des extrêmes est égal au produit des moyens on a : $b^2 = a \,.\, c$. On dit que b est *moyenne proportionnelle* entre a et c. (**242**) Cette moyenne proportionnelle est donnée par $b = \sqrt{a \,.\, c}$.

Il ne faut pas confondre la moyenne proportionnelle de deux nombres avec leur *moyenne arithmétique* qui est leur demi-somme. On démontre d'ailleurs que la moyenne arithmétique est toujours la plus grande des deux.

41. Grandeurs proportionnelles. — Il arrive très souvent que deux grandeurs sont liées l'une à l'autre, les valeurs numé-

riques prises par chacune d'elles dépendant des valeurs numériques de l'autre. Par exemple la surface d'un carré dépend de la longueur de son côté (**263**), le temps qu'une pierre met à tomber dépend de la hauteur de sa chute (**331**). La dépendance entre les deux grandeurs est parfois assez complexe. Nous reviendrons là-dessus de façon un peu plus précise en Algèbre (Chap. VI, **139**). Pour le moment, nous nous bornerons à examiner quelques cas très simples.

Le prix d'achat d'une pièce d'étoffe dépend de sa longueur, le prix d'achat d'un champ de sa surface, le poids d'une barre de fer de son volume, la distance parcourue par un train du temps depuis lequel il marche, etc... Il y a dans tous ces cas une propriété commune : *si l'une des grandeurs devient* 2, 3, 4, ... *fois plus grande (ou plus petite), la grandeur qui en dépend devient également* 2, 3, 4 *fois plus grande (ou plus petite).*

Si un mètre d'étoffe est vendu 5f,50, un coupon de 7 mètres de la même étoffe sera vendu 7 fois plus cher, soit 5,50 . 7 = 38f,50. Si un hectare de terrain vaut 2400 francs, 12 hectares du même terrain vaudront 2400 × 12 = 28800 francs. Si l'on constate qu'un train marchant de façon régulière a mis 2 heures et demie, soit 150 minutes, pour aller de Paris à Blois, pour aller jusqu'à Etampes qui est trois fois plus près de Paris il mettra 3 fois moins de temps, soit 50 minutes.

De telles grandeurs sont dites directement proportionnelles, ou plus simplement *proportionnelles*.

42. — Reprenons l'exemple du train, qui allant de Paris à Blois fait 182 kilomètres en 150 minutes. Cherchons le temps que ce train mettra pour faire une route qui soit les $\frac{3}{7}$ de la première, soit 182 . $\frac{3}{7}$ = 78 kilomètres. Pour faire le septième de 182 kilomètres, il mettra 7 fois moins de temps, soit $\frac{150}{7}$ minutes, et pour faire les 3 septièmes, 3 fois plus de temps que pour faire un septième, soit : 150 . $\frac{3}{7}$ = 64 minutes environ.

On voit que 182 et 150 sont tous deux multipliés par $\frac{3}{7}$. On a donc : $\frac{182}{150} = \frac{182 \cdot \frac{3}{7}}{150 \cdot \frac{3}{7}}$. Le raisonnement étant le même quelque soit le chemin parcouru, on voit que le quotient du nombre de kilomètres parcourus par le nombre de minutes employées à les parcourir a une valeur constante. Le lecteur sait d'ailleurs que ce quotient s'appelle la *vitesse* en kilomètres par minutes du train (**326**).

Il est aisé de voir que ce raisonnement est général : *étant données deux grandeurs proportionnelles, si a, b, c, d,... sont les valeurs que prend l'une d'elles, les valeurs numériques correspondantes* A, B, C, D, ... *que prend l'autre sont telles que les quotients* $\frac{a}{A}, \frac{b}{B}, \frac{c}{C}, \frac{d}{D}, \ldots$ *soient tous égaux.*

On voit que, dans la proportion : $\frac{a}{A} = \frac{b}{B}$, *a* et A ne représentent pas des grandeurs de même espèce. Mais il n'en est plus ainsi lorsqu'on remplace cette proportion par la proportion équivalente : $\frac{a}{b} = \frac{A}{B}$. On a ainsi la nouvelle propriété : *si deux grandeurs sont proportionnelles, le rapport de deux valeurs quelconques de l'une d'elles est égal au rapport des valeurs correspondantes de l'autre.* Si le rapport des longueurs de deux coupons d'une même étoffe est $\frac{3}{2}$, le rapport des prix est aussi $\frac{3}{2}$, ce qui revient à dire ici que, si l'un des coupons est une fois et demie plus long que l'autre, il est une fois et demie plus cher.

43. — Il arrive parfois que deux grandeurs varient en sens inverse l'une de l'autre, ou, de façon plus précise : *si l'une des grandeurs devient* 2, 3, 4,... *fois plus grande* (*ou plus petite*), *l'autre devient en même temps* 2, 3, 4,... *fois plus petite* (*ou plus grande*). On dit alors qu'elles sont *inversement proportionnelles*. Le nombre des mètres d'étoffe que l'on peut acheter avec

25 francs est inversement proportionnel au prix du mètre d'étoffe. Si le mètre coûte $2^f,50$, on pourra en avoir 10, mais, si le mètre coûte deux fois plus cher, soit 5 francs, on aura seulement 5 mètres au lieu de 10, soit 2 fois moins.

De même le temps mis par des ouviers pour faire un travail est en général inversement proportionnel au nombre des ouvriers ; le temps mis par une automobile pour parcourir un trajet donné est inversement proportionnel à la vitesse à laquelle elle marche, etc...

Etant données deux grandeurs inversement proportionnelles, si a, b, c, d,... sont les valeurs que prend l'une d'elles, les valeurs numériques correspondantes A, B, C, D, ... *que prend l'autre sont telles que les produits* $a.A$; $b.B$; $c.C$; $d.D$; ... *soient tous égaux.*

Dans l'exemple ci-dessus, le produit du nombre de mètres d'étoffe achetés, par le prix du mètre doit être 25 francs, quel que soit le prix du mètre ; c'est donc un nombre constant. Nous laissons au lecteur le soin de voir, par un raisonnement analogue à celui qui a été fait pour les grandeurs proportionnelles, que la propriété est générale.

L'égalité $a.A = b.B$ peut encore s'écrire en divisant par $A.b$ les deux membres : $\frac{a}{b} = \frac{B}{A}$, que l'on peut énoncer :

Etant données deux grandeurs inversement proportionnelles, le rapport de deux valeurs quelconques de l'une d'elles est égal au rapport inverse des valeurs correspondantes de l'autre.

Une grandeur peut dépendre à la fois de plusieurs autres et être directement proportionnelle à certaines de ces grandeurs et inversement proportionnelle à d'autres. Par exemple, le temps mis par un piéton pour faire un certain trajet est proportionnel à la longueur du trajet et inversement proportionnel à sa vitesse. Les raisonnements sur de telles grandeurs se ramènent à des raisonnements sur les grandeurs directement ou inversement proportionnelles.

44. Changement d'unités. — On a souvent besoin dans la pratique d'effectuer un changement d'unité : on a, par exemple, à résoudre des problèmes du genre des deux suivants :

Combien vaut en marks une somme de $14^f,85$, sachant que un mark vaut $1^f,25$?. — Quelle est en mètres la longueur d'une barre de fer de 3 yards et demi, le yard valant $0^m,914$?

Les notions de rapport et de proportion permettent de répondre à ces questions. Nous avons vu que le rapport de deux grandeurs ne dépend pas du choix de l'unité. Si donc on a deux grandeurs A et B dont les mesures soient a et b avec une certaine unité et a' et b' avec une autre unité, c'est que : $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$. *Les mesures de deux grandeurs dans des systèmes d'unité quelconques sont des grandeurs proportionnelles.*

Dans les problèmes qui précèdent, on est ramené à chercher une quatrième proportionnelle à trois nombres donnés. Dans le premier cas, on a deux sommes de $14^f,25$ et de $1^f,25$, dont les valeurs en marks sont a pour la première et 1 pour la seconde, a étant justement le nombre demandé. On doit avoir la proportion : $\frac{14,85}{1,25} = \frac{a}{1} = a$. Donc :

$$a = \frac{14,85}{1,25} = \frac{1\,485}{125} = \frac{297}{25} = 11^{mk},88.$$

Dans le second problème, on a deux barres de longueurs 3 yards et demi et 1 yard, barres dont les longueurs en mètres sont a et $0^m,914$. On a : $\frac{3,5}{1} = \frac{a}{0,914}$ ou en faisant les produits des extrêmes et des moyens : $a = 3,5 \times 0,914 = 31^m,99$ ou 32 mètres à un centimètre près.

Si toutes les unités sont empruntées au système métrique (**46**), les problèmes sont plus simples et il suffit de faire des multiplications ou des divisions par 10, 100, 1 000. Si l'on a la capacité d'un récipient en mètres cubes, on en déduit sa capacité en litres en multipliant par 1 000, car un mètre cube contient 1 000 litres; une longueur donnée en centi-

mètres s'exprimera en mètres en divisant par 100 le nombre qui la mesure, etc.

45. Applications. — Les diverses remarques qui précèdent sont d'une application fréquente. Nous nous bornerons à traiter trois cas très simples. D'aillleurs le lecteur trouvera en Algèbre (**104**) des méthodes beaucoup plus rapides permettant de résoudre tous les cas analogues.

Supposons que, dans une usine, on veuille distribuer entre trois employés une gratification de 300 francs de façon que les sommes distribuées soient proportionnelles, d'une part, aux traitements de ces employés : 2 400 francs, 1 500 francs et 1 200 francs, et, d'autre part, aux temps depuis lesquels ils font partie de l'usine : 2 ans 3 mois, 4 ans et 6 mois, ou, si l'on veut, de façon que ces parts soient proportionnelles aux sommes déjà gagnées par ces employés. C'est là un problème de *partages proportionnels*.

On peut le traiter comme il suit : si l'on donne 1 franc de gratification par 100 francs de traitement et par année de séjour à l'usine, le premier employé devra avoir $24 . 2\frac{1}{4} = 54$ francs, le second $15 . 4 = 60$ francs et le dernier $12 . \frac{1}{2} = 6$ francs, soit au total $54 + 60 + 6 = 120$ francs. On en déduit immédiatement que, pour une gratification totale de 300 francs, les parts des divers employés sont les $\frac{300}{120} = \frac{5}{2}$ des parts précédentes, soit : $54 . \frac{5}{2} = 135$ fr. pour le premier, $60 . \frac{5}{2} = 150$ fr. pour le second, et enfin $6 . \frac{5}{2} = 15$ fr. pour le dernier.

Prenons maintenant un problème de *mélanges*.

Combien faut-il prendre d'eau bouillante pour préparer, par addition d'eau froide à 10°, un bain de 200 litres à 37° ?

On sait que pour élever d'un degré la température d'un litre d'eau il faut lui fournir une quantité de chaleur d'une « calorie », et que lorsqu'on abaisse d'un degré sa température

on lui enlève une calorie. Chaque litre d'eau froide porté à 37° reçoit donc $37 - 10 = 27$ calories et chaque litre d'eau bouillante porté aussi à 37° perd $100 - 37 = 63$ calories. On en déduit que 27 litres d'eau bouillante perdront 27.63 calories qui précisément permettront à 63 litres d'eau froide d'être portés à 37°. On aura ainsi $27 + 63 = 90$ litres d'eau. Pour préparer 200 litres d'eau, il suffira de prendre les $\frac{27}{90} = \frac{3}{10}$ de 200 litres, soit 60 litres d'eau bouillante.

Dans les problèmes *d'intérêts*, on suppose qu'un capital rapporte un intérêt proportionnel à la somme placée et au temps pendant lequel elle est placée. On appelle *taux* la somme rapportée par 100 francs pendant un an, mais il est plus commode de considérer la somme r rapportée par 1 franc en un an. C'est ainsi que pour une somme placée au taux 3 pour 100 (en abrégé 3 %), on a : $r = 0{,}03$.

Le lecteur établira sans peine que l'intérêt I d'un capital C placé pendant n années au taux r par franc est, d'après ce qui précède, donné par la formule :

$$I = Cnr.$$

Cherchons, par exemple, au bout de combien de temps une somme de 500 francs placée à 3 % est doublée. L'intérêt annuel est 500.0,03. Il est égal au capital au bout d'un nombre d'années $\frac{500}{500.0{,}03} = \frac{1}{0{,}03} = \frac{100}{3} = 33$ ans $\frac{1}{3}$, ou 33 ans 4 mois, résultat visiblement indépendant de la somme considérée.

46. Système métrique. — Le système métrique, quoique à peu près universellement employé [1], ne date que de la fin du XVIIIe siècle. Il fixe des unités de longueur, de surface, de volume, de capacité, de poids et de monnaies. Chaque unité a

---

[1] Sans donner une liste complète, disons qu'il n'est encore que facultatif dans les pays de langues anglaise ou russe, mais est obligatoire dans la plupart des autres pays civilisés.

des multiples et des sous-multiples qui sont 10, 100, 1 000,... fois plus grands ou plus petits que l'unité principale.

Un des avantages du système métrique tient justement à ce fait qu'il est basé sur la numération décimale. Il n'en était pas de même avec les anciennes mesures : la toise, unité de longueur (valant $1^m,95$ environ), était divisée en 5 pieds, le pied en 12 pouces, le pouce en 12 lignes, la ligne en 12 points. De même encore en Angleterre le « yard » ($0^m,914$) est divisé en 3 « feet » ou pieds, le pied en 12 « inches » ou pouces, etc... Un autre avantage du système métrique, c'est qu'il rend les mesures comparables dans tous les pays : le mot « livre » désignait autrefois des poids différents suivant les contrées, poids variant de plus de 500 grammes.

Nous allons passer en revue les principales unités de mesure et indiquer pour chacune d'elles le degré d'approximation que comporte son emploi dans la pratique.

47. — L'unité de longueur est le *mètre* (1 mètre) qui est approximativement, d'après les mesures de Delambre et Méchain, la dix-millionième partie du quart du méridien terrestre, et qui est défini de façon rigoureuse comme la longueur de l'étalon déposé au Bureau international des Poids et Mesures à Sèvres (près de Paris). On en a fait pour divers pays des copies qui sont les étalons légaux.

Ses multiples et sous-multiples sont le *kilomètre* ($1^{km} = 1\,000^m$), l'*hectomètre* ($1^{hm} = 100^m$), le *décamètre* ($1^{dam} = 10^m$), le *décimètre* ou dixième de mètre ($1^{dm} = 0^m,1$), le *centimètre* ou centième de mètre ($1^{cm} = 0^m,01$), le *millimètre* ou millième de mètre ($1^{mm} = 0^m,001$), le μ (mû) ou millionième de mètre ($1^{\mu} = 0^m,000\,001$).

Le kilomètre et l'hectomètre servent à mesurer les routes. Ces mesures se font pratiquement à 10 mètres ou 100 mètres près pour plusieurs kilomètres, et à 1 mètre près pour quelques hectomètres. La plus grande unité réalisée est le décamètre, sous forme de chaîne d'arpenteur ou de décamètre à ruban. Les mesures se font alors à 1 décimètre près.

Les étoffes se mesurent avec des double-mètres, des mètres ou des demi-mètres en bois, ou avec un mètre à ruban. On se contente du centimètre comme approximation. C'est avec la même précision que les menuisiers, entrepreneurs, maçons,... font le « métré » d'un appartement ou dressent le plan d'une maison. Ils utilisent, en plus du mètre à ruban, des mètres pliants en bois, cuivre ou aluminium.

L'ingénieur pour ses machines, le géographe pour ses cartes, utilisent de préférence le décimètre ou le double-décimètre en bois, os, ou cuivre, avec des divisions en millimètres ou même en demi-millimètres.

En Physique ou en Histoire Naturelle, on mesure parfois de très petites longueurs inférieures au μ. Par contre, en Astronomie, on a besoin d'évaluer les distances de millions de kilomètres : on emploie souvent comme unité de longueur soit le rayon de la terre, soit la distance de la terre au soleil, soit enfin la distance de 300 000 kilomètres que parcourt la lumière en une seconde. Dire que le soleil est à 8 minutes de la terre, c'est dire de façon abrégée que la lumière met 8 minutes pour aller du soleil à la terre et que par suite leur distance est approximativement $8 \cdot 60 \cdot 300\,000 = 144\,000\,000^{\text{km}}$.

48. — Les aires, ou surfaces, et les volumes ne se mesurent pas par comparaison avec un étalon. On se borne à mesurer certaines longueurs pour pouvoir en déduire par le calcul la surface ou le volume cherchés. Nous verrons en Géométrie (**261** et suivants) comment on peut faire de tels calculs. L'unité de surface est le *mètre carré* (1^{m^2}) ou surface du carré qui a 1 mètre de côté, et l'unité de volume le *mètre cube* (1^{m^3}) ou volume du cube qui a 1 mètre de côté. On démontre (**263**) que, si le côté d'un carré devient 10, 100, 1 000,... fois plus grand ou plus petit, sa surface devient 100, 10 000, 1 000 000,... de fois plus grande ou plus petite. Par exemple, le *kilomètre carré* vaut 1 000 000 de mètres carrés ($1^{\text{km}^2} = 1\,000\,000^{\text{m}^2}$), le mètre carré vaut 10 000 *centimètres carrés* ($1^{\text{m}^2} = 10\,000^{\text{cm}^2}$). De même si le côté d'un cube devient 10, 100,... fois plus grand ou

plus petit, son volume devient 1 000, 1 000 000,... de fois plus grand ou plus petit (**276**). Un mètre cube vaut 1 000 *décimètres cubes* ($1^{m^3} = 1000^{dm^3}$), etc.

Pour évaluer la surface d'un champ, on emploie souvent l'*are* qui vaut 100 mètres carrés ($1^a = 100^{m^2}$), l'*hectare* qui vaut 100 ares ($1^{ha} = 100^a$), et le *centiare* qui vaut un centième d'are ou un mètre carré ($1^{ca} = 0^a,01 = 1^{m^2}$). Pour évaluer le volume des bois de chauffage, on utilise le *stère* qui vaut un mètre cube, et quelquefois le *décastère* qui vaut 10 stères.

Le kilomètre carré sert à évaluer la surface d'un pays, l'hectare, l'are et le centiare celle des petites étendues de terrain. L'approximation ne dépasse jamais le centiare. Le mètre carré est employé par les peintres, maçons, parqueteurs ; le centimètre carré sert aux dessinateurs pour les petites surfaces.

Le mètre cube s'emploie dans les mesures de terrassements ou de matériaux de construction. Pour les petits volumes on prend le centimètre cube.

49. — Pour des mesures de liquides ou de graines on ne peut pas opérer comme pour des solides à formes géométriques. On a réalisé des mesures effectives de capacité, dont la principale est le *litre* qui équivaut au décimètre cube [1] ($1^l = 1^{dm^3}$). Ses multiples et sous-multiples sont l'*hectolitre* ($1^{hl} = 100^l$), le *décalitre* ($1^{dal} = 10^l$), le *décilitre* ($1^{dl} = 0^l,1$), le *centilitre* ($1^{cl} = 0^l,01$). Il faut remarquer que le mètre cube vaut 10 hectolitres et que le centilitre vaut 10 centimètres cubes. Pour le vin, l'alcool, on se sert de litres en verre, ou de diverses mesures en étain, ayant la forme de cylindres deux fois plus hauts que larges ; pour les graines, ou autres matières sèches, de cylindres en bois de hauteur égale au diamètre. Toutes ces

---

[1] En réalité le litre correspond au volume occupé dans des conditions bien définies par 1^{kg} d'eau distillée. Le kilogramme étant défini d'autre part par comparaison avec un étalon, il n'y a pas identité complète entre les deux définitions. Au point de vue pratique, la différence entre le litre et le décimètre cube est négligeable.

mesures se font à 1 décalitre près. L'hectolitre s'emploie pour les charbons, les liquides en gros, les légumes secs, etc...

L'unité de poids est le kilogramme (1^{kg}), ou poids de l'étalon déposé au Bureau international des Poids et Mesures. C'est à peu près le poids d'un décimètre cube d'eau distillée. La millième partie du kilogramme est le *gramme* (1^{gr}). Ses multiples et sous-multiples sont l'*hectogramme* ($1^{hg} = 100^{g}$), le *décagramme* ($1^{dag} = 10^{gr}$), le *décigramme* ($1^{dg} = 0^{g},1$), le *centigramme* ($1^{cg} = 0^{g},01$), le *milligramme* ($1^{mmg} = 0^{g},001$). Signalons encore la *tonne* ($1\,000^{kg}$) et le *quintal* (100^{kg}) qui servent pour les grosses pesées : wagons, machines, fourrages, charbons en gros, etc... L'approximation de telles pesées ne dépasse jamais le kilogramme. Les plus gros poids réalisés dans le commerce sont des poids de 50 kilogrammes et de 20 kilogrammes, en fonte, de forme rectangulaire. Il y a des poids plus petits en fonte et de forme hexagonale, ou cylindriques et en laiton, avec lesquels on fait suivant les cas des pesées à 10 grammes ou 1 gramme près. Enfin les pharmaciens et les chimistes emploient des petits poids formés de lamelles de laiton, aluminium, nickel, argent ou platine qui vont du demi-gramme au milligramme.

Les pesées se font avec des balances de formes très variées : balances des pharmaciens, balance Roberval, etc... ou même des instruments gradués une fois pour toutes et dans lesquels on n'utilise pas de poids marqués : pèse-lettres, pesons à ressort, balance romaine, ponts à bascule, etc...

On appelle *densité* D d'un corps le rapport du poids P de ce corps au poids d'un égal volume d'eau V. On a donc $P = VD$ et il suffit de connaître deux de ces quantités pour avoir la troisième.

50. — L'unité de monnaie est le *franc* (1^{f}) ; il a deux sous-multiples : le *décime* ($0^{f},1$) et surtout le *centime* ($0^{f},01$). Dans le commerce, on emploie des *billets de banque* de valeur conventionnelle : 1 000, 500, 100, 50 francs suivant le cas, et des pièces, dont les plus usuelles sont des pièces d'or de 20 francs et 10 francs : *louis* et *demi louis* ; des pièces d'argent de

5 francs, 2 francs, 1 franc, $0^f,50$; une pièce en nickel de $0^f,25$ et enfin des pièces de cuivre de $0^f,10$ et $0^f,05$ (*sou.*)

Les pièces d'or contiennent 900 grammes d'or pour 100 grammes de cuivre. Le gramme d'or monnayé vaut $3^f,10$.

Les pièces de 5 francs en argent contiennent 900 grammes d'argent pour 100 grammes de cuivre ; les autres pièces d'argent contiennent 835 grammes d'argent pour 165 grammes de cuivre. Une pièce de un franc en argent pèse 5 grammes.

La pièce de $0^f,25$ est en nickel pur et pèse 7 grammes.

Les pièces dites de cuivre ou *billon* contiennent 95 parties de cuivre, 4 d'étain et 1 de zinc. La pièce de $0^f,05$ pèse 5 grammes et a un diamètre de 25 millimètres.

51. Système C. G. S. — Nous allons donner quelques indications rapides sur le système d'unités employé par les physiciens pour rendre comparables les mesures. Il est dérivé du système métrique et comprend trois unités fondamentales à l'aide desquelles, on définit toutes les autres. Ce sont le *centimètre*, le *gramme*, et la *seconde* ; les trois initiales C, G, S ont donné son nom au système. Le centimètre est la centième partie du mètre-étalon. Le gramme, ou millième partie du kilogramme étalon, est ici une unité de *masse* et non de *poids*. Cette distinction, sur laquelle nous ne pouvons insister ici, est très importante en théorie et suffirait à elle seule à différencier profondément les deux systèmes. Quant à l'unité de temps nous en reparlerons en Cinématique (**324**).

Ces unités n'ont ni multiples ni sous-multiples. Tout résultat s'exprime en *unités* C. G. S. Aussi certains nombres sont-ils très grands ou très petits : la distance du soleil à la terre (150 millions de kilomètres) est ici :

150 000 000 000 00 C. G. S.

De même, les molécules d'hydrogène ont approximativement, croit-on, une masse de :

0,000 000 000 000 000 000 000 001 C. G. S.

On évite ces grands nombres en introduisant des puissances de 10 : la distance du soleil à la terre s'écrit $1,5 \times 10^{13}$ C. G. S, la masse de la molécule d'hydrogène : $\frac{1}{10^{24}}$ C. G. S ou encore avec une notation commode : 10^{-24} C. G. S. (**90**).

Exercices. — N°s 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 91, 92, 144, 145, 146, 147, 346, 349, 350, 351, 353, 396, 397, 473, 474, 475, 476, 477, 479, 491.

CHAPITRE V

ERREURS — CALCULS NUMÉRIQUES

52 Erreur absolue. — Quand on mesure une longueur, le résultat trouvé n'est habituellement pas représenté par un nombre exact de mètres ni même de centimètres. De plus, si l'on recommence plusieurs fois de suite cette même mesure, on ne trouve pas tout-à-fait le même résultat à chaque opération. Il en est de même dans l'évaluation d'une grandeur quelconque. Les erreurs ainsi commises sont classées parfois en *erreurs systématiques* ou évitables, qui proviennent par exemple d'un vice de construction de l'appareil de mesure (mètre trop court, balance à bras inégaux, litre trop grand,...), et en *erreurs accidentelles*, qui sont inévitables et se reconnaissent à ce caractère qu'elles donnent indifféremment des résultats trop grands ou trop petits.

Mais, au point de vue qui nous occupe, cette distinction est peu importante. Il nous suffit de savoir qu'en effectuant une mesure le résultat est entaché d'une erreur, dite *erreur absolue*, qui est la différence entre la valeur exacte que l'on aurait dû trouver et celle que l'on a trouvée. Habituellement on ne connaît pas cette erreur commise ; on sait simplement qu'elle est inférieure à une certaine quantité appelée *limite supérieure de l'erreur commise*. Une longueur de $4^{m},95$ sera dite connue à 1 décimètre près si l'on sait que l'erreur commise est au plus égale à 1 décimètre. On ne sait pas pour cela si

$4^m,95$ est trop grand ou trop petit. La longueur exacte est comprise entre $4^m,85$ et $5^m,05$. La première valeur est dite *approchée par défaut* et la seconde *par excès*.

On considère parfois, suivant le sens de l'approximation, les erreurs comme positives ou négatives (**65**). Si $4^m,95$ est le nombre trouvé et e l'erreur absolue, $4,95 + e$ est la valeur exacte, quel que soit le signe de e.

Parfois, bien que la valeur exacte d'un nombre soit connue, on préfère prendre une valeur inexacte, mais plus simple. C'est ainsi que l'on prend souvent pour le nombre π (**262**) la valeur 3,14, bien que l'on sache que les chiffres qui suivent le 4 sont : 1, 5, 9, 2, ... Ici l'erreur absolue est inférieure à $\frac{1}{100}$.

53 Erreurs relatives. — Les erreurs commises ne sont pas toujours du même ordre de grandeur : si un chimiste pèse 3 centigrammes d'un corps à 1 milligramme près et que d'autre part un wagon de 12 tonnes soit pesé à 10 kilogrammes près, l'erreur commise est dans le premier cas $\frac{1}{30}$ du poids considéré et dans le second $\frac{10}{12\,000}$ ou $\frac{1}{1\,200}$ du poids du wagon. La seconde mesure est donc beaucoup plus précise que la première ; il est, de même, plus précis de mesurer 100 kilomètres à un mètre près que 1 mètre à un centimètre près. On appelle *erreur relative* d'une mesure le rapport de l'erreur absolue au résultat de la mesure. Il est essentiel de remarquer que l'*erreur relative est un rapport* ; elle nous renseigne sur le degré de précision de la mesure et nous permet ainsi de comparer des opérations portant sur des grandeurs différentes. Cette notion est complètement distincte, comme on le voit, de celle d'erreur absolue et il faut bien se garder de les confondre.

Supposons encore que deux résultats de mesure soient exprimés respectivement par les nombres 423,768 et 0,078, les erreurs absolues commises dans les deux cas étant inférieures à $\frac{1}{1\,000}$. Il résulte de ce qui précède que les erreurs relatives

sont néanmoins très différentes : on peut prendre dans le premier cas comme limite supérieure de cette erreur $\frac{0,001}{100} = \frac{1}{100\,000}$ et dans le second cas $\frac{0,001}{0,01} = \frac{1}{10}$. On voit que l'erreur absolue est d'autant plus petite qu'il y a plus de *chiffres décimaux* conservés, et l'erreur relative qu'il y a plus de *chiffres significatifs* (**55**).

54. — Cette distinction entre chiffres décimaux et chiffres significatifs est fondamentale dans l'étude des erreurs. Elle permet, en lisant le résultat d'une mesure, d'être renseigné immédiatement sur son erreur absolue en notant la place de la virgule, et surtout sur son erreur relative, c'est-à-dire sur le degré de précision de la mesure, en comptant le nombre total de chiffres.

Il est essentiel en pratique de ne pas garder de chiffres inexacts ; si, par exemple, dans une pesée, on trouve $3^{kg},78024$, et que la balance ne permette de répondre que du double décigramme, il est inutile de conserver les deux derniers chiffres qui n'ont aucune valeur et donneraient une idée fausse de la précision de la mesure. Le nombre exact étant compris entre 3,78024 — 0,0002 et 3,78024 + 0,0002 ou 3,78004 et 3,78044, on prendra 3,780. Au point de vue pratique, il n'est pas indifférent d'écrire 3,780 ou 3,78 bien que ces deux nombres soient égaux, car le premier correspond à une mesure plus précise que le second.

Nous avons indiqué sommairement (**46** et suivants) quelles étaient les précisions des mesures les plus usuelles de longueur, volume, poids, etc... Ajoutons ici que, pour les usages courants du commerce et de l'industrie, il suffit de 3 ou 4 chiffres significatifs (quelquefois 5 dans le cas des pesées.) Il est donc inutile comme on le fait trop souvent de garder un très grand nombre de chiffres pour exprimer le résultat d'une mesure.

55. — Lorsqu'on se borne à garder dans le résultat d'une mesure un certain nombre de chiffres décimaux, on augmente

d'une unité le dernier chiffre conservé, lorsque le premier chiffre supprimé est 5, 6, 7, 8 ou 9. Le nombre 3,1415926[1]... (**262**) s'écrira avec 3 chiffres décimaux 3,142 ; avec 4 chiffres décimaux 3,1416. La justification de ce procédé est immédiate si l'on remarque que les erreurs absolues commises en prenant 3,1415 et 4,1416 sont dans les deux cas : 0,000092 ... et 0,000007 ... Nous dirons que 3,1416 est la valeur de π avec 4 chiffres décimaux exacts. De façon plus précise, nous dirons qu'*un nombre* N *a* n *chiffres décimaux exacts lorsque l'erreur absolue avec laquelle il est connu est inférieure à une demi-unité du dernier ordre conservé, c'est-à-dire à* $\frac{1}{2 \cdot 10^n}$.

Inversement, *si un nombre* N *est connu avec une erreur absolue inférieure à* $\frac{1}{10^n}$, *les* $n - 1$ *premiers chiffres décimaux sont exacts* (et non pas en général les n premiers.) Prenons en effet 423,768 supposé connu à $\frac{1}{100}$ près. Le nombre exact est compris entre 423,758 et 423,778 ; on ne peut donc pas garder le chiffre des centièmes, et l'on se borne à celui des dixièmes : 423,8, en forçant le dernier chiffre conservé.

On passe des erreurs absolues aux erreurs relatives en remarquant que l'erreur relative est le rapport de l'erreur absolue au nombre (**53**). Le lecteur en déduira sans peine les deux résultats suivants que nous nous bornons à énoncer : *si un nombre* N *a* n *chiffres significatifs exacts, l'erreur relative avec laquelle il est connu est inférieure à* $\frac{1}{2 \cdot 10^{n-1}}$. — *Si un nombre* N

---

(1) Dans toutes les tables numériques de la fin du volume comportant des résultats approchés, le dernier chiffre est muni d'une astérisque s'il correspond à une valeur approchée par excès. C'est ainsi que 3,1416* est un nombre compris entre 3,14155 et 3,1416. Sans insister davantage là-dessus, faisons remarquer que l'erreur commise est toujours inférieure à $\frac{1}{4}$ d'unité du dernier ordre conservé, pourvu que l'on diminue le nombre de $\frac{1}{4}$ de cette unité dans le cas où il est suivi d'une astérisque et qu'on l'augmente de $\frac{1}{4}$ dans le cas contraire.

est connu avec une erreur relative inférieure à $\frac{1}{10^n}$, *les* $n-1$ *premiers chiffres significatifs de* N *sont exacts* (et non pas en général les n premiers.)

56. Opérations sur les nombres approchés. — Dans la pratique de l'arithmétique, on emploie presque toujours, comme nous venons de le voir, des nombres légèrement inexacts. On peut se demander quelle est l'influence de pareilles erreurs sur les résultats du calcul. Il y a deux problèmes à résoudre : *connaissant les erreurs commises sur chacune des données, quelle est l'erreur commise sur le résultat ?* et inversement, *connaissant l'approximation dont on a besoin pour un résultat, avec quelles approximations faut-il avoir les données ?* Ces problèmes sont parfois très compliqués et l'on ne peut guère en donner de solution générale. Nous nous bornerons à examiner les cas les plus élémentaires : addition, soustraction, multiplication, division, ...

Soit à effectuer l'addition :

$$\begin{array}{r} 3{,}93 \\ 0{,}027356 \\ 18{,}172 \\ \hline \end{array}$$

dans laquelle tous les chiffres écrits sont supposés exacts. On ne peut pas répondre du millième dans le total puisque le chiffre des millièmes du premier nombre n'est pas connu. Il suffira donc de poser l'addition comme il suit :

$$\begin{array}{r} 3{,}93 \\ 0{,}03 \\ 18{,}17 \\ \hline 22{,}13 \end{array}$$

On a forcé comme on le voit le dernier chiffre conservé 2 dans 0,027356 à cause du suivant qui est 7. L'erreur absolue commise est ici inférieure à $\frac{1}{200}$ pour chacun des trois nombres, et par suite pour le total elle est inférieure à $\frac{3}{200}$ ou encore à $\frac{1}{10}$. Le

résultat est donc ici : 22, le dernier chiffre 1 n'étant pas forcément exact, au sens rigoureux du mot (**55**). On ne tient aucun compte des erreurs relatives, qui sont notablement différentes, le second nombre étant beaucoup plus précis que le premier.

Le raisonnement s'applique toutes les fois qu'il y a moins de vingt nombres à additionner, ce qui est le cas le plus fréquent. Donc : *si l'on a n chiffres décimaux exacts dans chaque terme d'une addition, on garde n — 1 chiffres décimaux au total; si l'on veut garder n chiffres décimaux au total, on en conservera n + 1 dans chaque terme.* Les chiffres obtenus sont d'ailleurs exacts au sens précis du mot, dans le cas où l'on a seulement deux termes à additionner. En pratique, les erreurs soumises étant tantôt par défaut et tantôt par excès, il y a une certaine compensation, et l'on a des résultats plus exacts que ne peut le faire prévoir la théorie générale ([1]).

On a les mêmes règles dans le cas de la soustraction. Remarquons ici que l'on est toujours dans le cas où il n'y a que deux nombres à considérer.

57. — Soit maintenant à multiplier l'un par l'autre deux nombres approchés a et b. Si α est l'erreur relative commise sur a, αa est l'erreur absolue (**53**), et, en supposant a approché par défaut, la valeur exacte de ce facteur est $a + \alpha a$. Avec la même hypothèse et une notation analogue, la valeur exacte du second facteur est $b + \beta b$. Le produit exact est non pas ab, mais (**6**) :

$$(a + \alpha a)(b + \beta b) = (a + \alpha a)b + (a + \alpha a)\beta b = ab + ab\alpha + ab\beta + ab\,\alpha\beta.$$

L'erreur absolue commise en prenant ab pour produit est $ab\alpha + ab\beta + ab\alpha\beta$ ou $ab(\alpha + \beta + \alpha\beta)$. L'erreur relative est

---

([1]) Lorsqu'on veut tenir compte des astérisques qui indiquent si le nombre est ou non approché par excès (**55**), on peut ajouter $\frac{1}{4}$ d'unité du dernier ordre conservé pour chaque nombre n'ayant pas d'astérisque et retrancher pour chacun des autres $\frac{1}{4}$ d'unité. On ne garde d'ailleurs comme correction finale qu'un nombre entier d'unités.

alors $\alpha + \beta + \alpha\beta$. Mais α et β étant très petits, $\alpha\beta$ est négligeable devant α ou β : si par exemple $\alpha = \beta = \frac{1}{10\,000}$, $\alpha\beta$ est seulement égal à $\frac{1}{100\,000\,000}$. L'erreur relative commise sur le produit est donc approximativement $\alpha + \beta$. Elle sera même en général inférieure à $\alpha + \beta$, car α et β sont le plus souvent des limites très supérieures des erreurs commises. Donc (à de rares exceptions près) *l'erreur relative du produit de deux nombres est au plus égale à la somme des erreurs relatives de ces nombres.*

Nous avons supposé les deux nombres approchés par défaut. Les résultats seraient analogues s'ils étaient tous deux approchés par excès. Si les deux approximations sont de sens contraire, l'erreur relative du produit sera sensiblement la différence des erreurs relatives des facteurs et sera par suite inférieure à la somme de ces deux erreurs, ce qui permet de garder encore l'énoncé qui précède.

Si les deux facteurs a et b ont chacun n chiffres significatifs exacts et n seulement, les erreurs relatives sont inférieures à $\frac{1}{2 \,.\, 10^{n-1}}$; l'erreur relative du produit est inférieure à $\frac{1}{10^{n-1}}$, et l'on n'est pas certain d'avoir n chiffres exacts, mais seulement $n - 2$. On en déduit que : *si l'on a n chiffres significatifs exacts dans chaque facteur d'un produit, on en a $n + 2$ au produit. — Si l'on veut avoir n chiffres significatifs exacts au produit, il faut en prendre $n + 2$ dans chaque facteur.*

58. — Il faut bien remarquer que, dans les énoncés relatifs à la multiplication, il s'agit d'erreurs relatives et de chiffres significatifs exacts, tandis que, pour l'addition, il s'agit d'erreurs absolues et de chiffres décimaux.

Les résultats sont exactement les mêmes pour la division que pour la multiplication : si q est le quotient de la division de a par b, on a $a = b \,.\, q$; l'erreur relative commise sur a est, comme on l'a vu, la somme ou la différence des erreurs relatives commises sur b et q; par suite l'erreur relative commise sur q

est la différence ou la somme des erreurs commises sur a et b, mais en tous cas au plus égale à la somme de ces deux erreurs relatives. On peut établir ce résultat de façon beaucoup plus rigoureuse par des calculs analogues à ceux qui ont été faits dans le cas de la multiplication, mais nous ne les donnerons pas.

Si un nombre b est la racine carrée d'un autre nombre a, a est inversement le carré de b ; l'erreur relative commise sur a est le double de l'erreur commise sur b, cela permet aisément de résoudre les problèmes relatifs aux erreurs, pour de telles opérations.

En général, pour des calculs comprenant une longue suite d'additions, de multiplications, etc., l'application systématique des règles qui précèdent devient rapidement très compliquée. Nous reviendrons plus loin sur cette question (**62**) pour donner quelques conseils pratiques.

59. Calculs abrégés. — Nous avons dit qu'il était inutile de garder, pour le résultat d'un calcul, plus de chiffres que n'en comporte la précision des données. Si l'on cherche le côté d'un champ carré de $84^{m^2},95$ de surface, il ne faut évidemment pas extraire la racine carrée de 84,95 avec 12 ou 15 chiffres décimaux. De même encore, le tiers de 1^m dans la pratique est $0^m,33$ ou parfois $0^m,333$ mais jamais $0^m,333333333$. On peut profiter de cette remarque pour abréger les opérations habituelles de l'arithmétique en se bornant aux chiffres utiles pour la précision que doit avoir le résultat.

Nous ne parlerons pas de l'addition ou de la soustraction abrégées, car nous avons déjà vu (**56**) quels étaient les chiffres qu'il fallait conserver dans ces opérations, et quels étaient ceux qu'il était inutile de recopier.

La question est plus complexe dans le cas de la multiplication. Supposons que nous voulions convertir en mètres une longueur de 23 yards 475, la valeur légale du « yard » anglais étant $0^m,91438348$. Il faut multiplier ces deux nombres l'un par l'autre. Nous avons fait ci-dessous l'opération comme d'habitude, puis à côté, nous avons refait cette multiplication en dis-

posant les chiffres du multiplicateur et par suite les produits partiels dans l'ordre inverse.

Le lecteur verra immédiatement que les deux procédés sont presque identiques et conduisent forcément au même résultat

23,475	
0,9	1438348
	187800
	93900
	70425
18	7800
70	425
939	00
2347	5
211275	
21,4651	5219300

23,475	
84383 419,0	
21 127 5	
234 7	5
93 9	00
7 0	425
1 8	7800
	70425
	93900
	187800
21,465 1	5219300

Le nombre de yards ayant 5 chiffres significatifs exacts, il faudra en garder 5 au plus pour le nombre de mètres (en réalité, on n'est même pas certain de l'exactitude du cinquième chiffre). Nous allons donc abréger l'addition des produits partiels en n'effectuant que l'addition des nombres placés dans chacune des deux opérations à gauche du trait vertical. Ayant pris ainsi 6 chiffres significatifs au total : 21,4652, nous dirons que la réponse est $21^{m},465$.

La deuxième façon de disposer les calculs présente sur la première l'avantage de commencer par les produits partiels les plus importants et de mieux montrer par suite quels sont les chiffres que l'on peut négliger. Aussi est-ce cette disposition que l'on adopte, mais en se dispensant d'écrire les chiffres à droite du trait vertical. Pour cela on procède comme il suit : on écrit le chiffre o des unités du multiplicateur un rang à droite du chiffre 5 du multiplicande qui correspond à l'approximation que l'on veut obtenir. La limitation des produits partiels à leur partie utile s'obtient en prenant des multiplicandes de plus en plus réduits : pour le produit par 9, on prend 23,475 ; pour 1, on barre le 5 devenu inutile et l'on garde 23,47 ; pour 4, on barre le 7 et

23,475
84383 419,0
21 127 5
234 7
93 9
7 0
1 8
21,465 1

l'on prend 23,4 ; etc... Il est bon d'ailleurs de tenir compte du chiffre que l'on vient de barrer pour les retenues : par exemple, on dira pour le produit de 23,4 par 4 : 4 fois 7 font 28, je retiens 3 ; 4 fois 4 font 16 et 3 de retenue, 19 ; ...

On voit ainsi que les deux derniers chiffres du multiplicateur sont inutiles, et que les produits partiels correspondants n'interviennent pas. Le produit trouvé étant 21,4652, on supprime le 2 et l'on garde $21^{m},465$.

Ce procédé de calcul, dû à Oughtred, ne demande que peu d'apprentissage et est très avantageux ; il suffit pour s'en convaincre de comparer une opération abrégée avec celle que donne la règle classique.

60. — On procède de façon analogue dans le cas de la division : supposons que l'on ait à chercher combien $173^{km},567$.. font de milles marins, le mille valant 1852 mètres ; il faut diviser le premier nombre par le second. L'opération s'effectue comme il suit.

On prend au dividende juste assez de chiffres pour avoir le premier chiffre du quotient, soit ici 173,57. On effectue la division en supprimant après la formation de chaque produit partiel le dernier chiffre du diviseur précédent ; à la fin de l'opération, le diviseur est ainsi réduit à son premier chiffre de gauche :

173,57	1,852
166 68	93,721
6 89	
5 56	
1 33	
1 30	
3	
2	
1	

173,57	1,852
6 89	93,71
1 33	
3	
1	

Dans la première opération nous avons transcrit tous les produits partiels : $1852 \times 9 = 16668$; $185 \times 3 = 556$ en tenant compte de la retenue due au chiffre 2 que l'on vient de sup-

primer au diviseur, etc... Le quotient est 93,71, mais on ne garde que 93,7.

Pour justifier ce procédé de calcul, il suffit de montrer que le produit de 1852 par 93,71 redonne 17357. Effectuons ce produit par la règle d'Oughtred, en remarquant que les produits partiels sont précisément 16668 ; 556 ; .. déjà calculés.

1852
1739
16668
556
130
2
17356

On voit que, pour avoir le reste de la division, reste qui ici est 1, on peut retrancher successivement ces divers produits partiels de 17357, au lieu de faire d'abord leur somme pour ensuite la retrancher de ce nombre : or ce sont ces soustractions successives qui ont été précisément faites dans le courant de la division abrégée. En pratique, on emploie d'ailleurs la seconde forme de calcul mise plus haut en supprimant l'écriture de ces produits partiels.

Le lecteur pourra effectuer la division par la méthode classique pour comparer la longueur des calculs.

61. Conseils pratiques. — Il peut arriver que l'on ait à faire plusieurs multiplications dans lesquelles l'un des facteurs est constamment le même. Par exemple, sachant qu'un litre de mercure pèse 13^{kg},596, on peut demander les poids de divers volumes de ce métal. Il est commode alors de dresser comme ci-contre la liste des 10 premiers multiples de 13,596.

1	13,596
2	27,192
3	40,788
4	54,384
5	67,980
6	81,576
7	95,172
8	108,768
9	122 364
10	135,960

La deuxième ligne s'obtient en doublant le nombre de la première ; la troisième par addition des lignes 1 et 2 ; la ligne 4 en doublant la ligne 2 ; la ligne 5 avec 2 et 3 ; la ligne 6 en doublant 3 ; la ligne 7 avec 3 et 4 ; la ligne 8 en doublant 4, et enfin la ligne 9 avec 4 et 5. Il est bon de vérifier que l'addition des nombres des lignes 1 et 9 donne bien 135,960, c'est-à-dire 10 fois 13,596.

L'usage de ce tableau est immédiat. Cherchons par exem-

ple le poids de 236^l675 de mercure. On effectue l'addition suivante :

poids de 20^l	$271^{kg},92$
» » 3	40 ,79
» » 0,6	8 ,16
» » 0 07	0 ,95
» » 0,005	0 ,07
poids total	321 ,89

Le poids cherché est à un hectogramme près $321^{kg},9$. Le lecteur verra sans peine l'analogie de ce procédé avec la règle d'Oughtred (**59**).

Si, de même, il faut effectuer plusieurs divisions avec un même diviseur a, on fait des multiplications par $\frac{1}{a}$ en dressant au préalable la liste des multiples de ce nombre. Au lieu de diviser un nombre par $\pi = 3,1415926..$, on le multiplie par $\frac{1}{\pi} = 0,3183098..$ (en pratique 0,3183). Au lieu de diviser un nombre par $\sqrt{2} = 1,414..$, on le multiplie par

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1,414..}{2} = 0,707...$$

au lieu de le diviser par $\sqrt{3} = 1,732..$ on le multiplie par $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0,577...$ De même encore l'identité

$$\frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b}$$

que nous laissons au lecteur le soin de vérifier, montre qu'au lieu de diviser un nombre par $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ on peut le multiplier par $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, puis diviser le résultat par $a - b$. Il est d'ailleurs facile de s'assurer que cette seconde méthode est beaucoup plus rapide que la première. On a par exemple :

$$\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{3 - 2} = \sqrt{3} + \sqrt{2} = 3,146...$$

Disons encore au sujet de la multiplication qu'il est bon de savoir par cœur tous les produits de deux facteurs pour lesquels le résultat est inférieur à 100.

Voici la liste de ceux qui sont les plus difficiles à retenir :

2 . 15 = 30	2 . 46 = 92	3 . 29 = 87	5 . 16 = 80
2 . 16 = 32	2 . 47 = 94		5 . 17 = 85
2 . 17 = 34	2 . 48 = 96	4 . 13 = 52	5 . 18 = 90
2 . 18 = 36	2 . 49 = 98	4 . 14 = 56	5 . 19 = 95
2 . 19 = 38		4 . 15 = 60	
2 . 25 = 50	3 . 14 = 42	4 . 16 = 64	6 . 12 = 72
2 . 26 = 52	3 . 15 = 45	4 . 17 = 68	6 . 13 = 78
2 . 27 = 54	3 . 16 = 48	4 . 18 = 72	6 . 14 = 84
2 . 28 = 56	3 . 17 = 51	4 . 19 = 76	6 . 15 = 90
2 . 29 = 58	3 . 18 = 54	4 . 23 = 92	6 . 16 = 96
2 . 35 = 70	3 . 19 = 57	4 . 24 = 96	
2 . 36 = 72	3 . 24 = 72		7 . 12 = 84
2 . 37 = 74	3 . 25 = 75	5 . 12 = 60	7 . 13 = 91
2 . 38 = 76	3 . 26 = 78	5 . 13 = 65	7 . 14 = 98
2 . 39 = 78	3 . 27 = 81	5 . 14 = 70	
2 . 45 = 90	3 . 28 = 84	5 . 15 = 75	8 . 12 = 96

62. — Dans les calculs faits avec des nombres approchés, il est très pénible de tenir compte des erreurs commises. Les multiplications, divisions, racines carrées obligent à calculer des erreurs relatives ; les additions, soustractions des erreurs absolues. Il faut, en général, calculer à plusieurs reprises l'erreur absolue d'un nombre connaissant son erreur relative, et inversement. De plus, on se trouve amené à garder un nombre considérable de chiffres significatifs au début du calcul pour être certain d'en avoir trois ou quatre exacts à la fin. Voici une règle qui, sans être très rigoureuse, a l'avantage d'être d'une application aisée et donne des résultats exacts dans un grand nombre de cas : *si le résultat d'un calcul doit être obtenu avec n chiffres significatifs exacts, on en prend deux de plus, soit $n+2$, dans tous les nombres employés pour ce calcul.*

Dans un calcul long et compliqué, cette règle peut se trouver insuffisante, les données de chaque problème partiel étant entachées d'erreurs qui s'accumulent ; malgré cela il est permis de la donner à ceux qui n'ont pas le temps de s'encombrer de

règles plus compliquées. Elle est d'ailleurs appliquée par un grand nombre de praticiens.

63. — Il arrive parfois qu'on peut simplifier un calcul en tenant compte de ce fait que certaines quantités sont négligeables par rapport aux autres. Si, par exemple, un nombre e est très petit, on pourra souvent sans erreur sensible, négliger son carré ou son cube qui sont encore plus petits : si $e = \frac{1}{1\,000}$ on a : $e^2 = \frac{1}{1\,000\,000}$ et $e^3 = \frac{1}{1\,000\,000\,000}$. Cette question est traitée en détail dans les traités d'Analyse ; nous nous bornerons ici à démontrer les égalités pratiques le plus souvent employées :

$$(1 + e)^2 = 1 + 2e$$

$$\sqrt{1 + e} = 1 + \frac{e}{2}$$

$$\frac{1}{1 + e} = 1 - e.$$

La première égalité résulte de ce que $(1 + e)^2 = 1 + 2e + e^2$ et que par hypothèse e^2 est négligeable. La deuxième s'obtient en remarquant que, d'après ce qui précède : $\left(1 + \frac{e}{2}\right)^2 = 1 + e$; on extrait ensuite la racine carrée des deux membres. Enfin pour la dernière il suffit d'écrire $(1 + e)(1 - e) = 1 - e^2$ (**86**), ou en négligeant e^2 : $(1 + e)(1 - e) = 1$. Nous laissons au lecteur le soin d'établir par des raisonnements analogues les trois égalités :

$$(1 - e)^2 = 1 - 2e$$

$$\sqrt{1 - e} = 1 - \frac{e}{2}$$

$$\frac{1}{1 - e} = 1 + e.$$

A l'aide de pareilles égalités, on a approximativement :

$$\frac{1}{0,98} = \frac{1}{1 - 0,02} = 1,02$$

$$\frac{1}{\sqrt{1,26}} = \frac{1}{1,13} = 0,87$$

$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{3,14} = \frac{1}{3 \cdot 1,05} = \frac{0,95}{3} = 0,32 \text{ etc...}$$

64. — Nous terminerons tout ce qui concerne la pratique du calcul numérique par un conseil très important. *Dans toute question conduisant à un résultat numérique il faut toujours faire à l'avance un premier calcul approché*, calcul qui est en quelque sorte un « avant-projet » et pour lequel on se borne à prendre tous les nombres avec un ou deux chiffres significatifs (il est indispensable d'en prendre deux si le premier chiffre est 1). Un tel calcul renseigne sur l'ordre de grandeur de résultat. Les physiciens les font toujours en C. G. S. (**51**). C'est ainsi que pour 475 300 on prendra $5 \cdot 10^5$ C. G. S. ; pour 0,001 729 on prendra $1,7 \cdot 10^{-3}$ C. G. S. ; etc...

Cherchons par exemple l'épaisseur d'une feuille de zinc rectangulaire de $12^{m},75$ de long et 42 centimètres de large, sachant que son poids est $62^{kg},350$ et que la densité du zinc est 7,19. L'épaisseur est donnée en C. G. S. par :

$$\frac{62\,350}{1275 \cdot 42 \cdot 7,19} = \frac{6,235 \cdot 10^4}{1,275 \cdot 4,2 \cdot 7,19 \cdot 10^4} = \frac{6,235}{1,275 \cdot 4,2 \cdot 7,19}.$$

Un calcul approché donne ici au dénominateur : $1,3 \cdot 4 \cdot 7 = 5,2 \cdot 7$ ou environ 36. L'épaisseur cherchée est environ $\frac{6}{36}$ ou $\frac{1}{6}$ soit 0,17 C. G. S. ou encore $1^{mm},7$. Si l'on fait le calcul exact, on trouve pour cette même épaisseur $1^{mm},619$...

Exercices. — Nos **71, 85, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 188, 233, 266.**

ALGÈBRE

CHAPITRE PREMIER

NOMBRES POSITIFS OU NÉGATIFS

65. Nombres positifs ou négatifs. — Un grand nombre des propriétés concernant les nombres entiers, fractionnaires ou décimaux étudiés en arithmétique se généralisent simplement par l'introduction des *nombres positifs ou négatifs*, appelés parfois *nombres algébriques*, par opposition avec les précédents qui sont les *nombres arithmétiques*.

Considérons les opérations faites par un caissier. Il pourra marquer les diverses sommes données ou reçues par des signes conventionnels. Les sommes qu'il paie sont en quelque sorte « en moins » dans sa caisse : il les marque du signe — et celles qu'il reçoit étant « en plus » dans sa caisse, il les marque du signe +. Les sommes affectées du signe + sont dites *positives*, et celles qui sont affectées du signe —, *négatives* ; ces signes + et — ne doivent pas, pour le moment, être confondus avec ceux qui ont déjà été employés pour l'addition et la soustraction.

Si nous admettons des versements fictifs, par exemple sous forme de billets à ordre, nous voyons que le compte peut commencer par un ou plusieurs nombres négatifs. Si la caisse est vide au début de la journée, après la première opération, le caissier possède $-a$ francs en caisse, s'il a signé un billet de a francs.

Cette classification des nombres en positifs et négatifs est commode dans un grand nombre de cas ; par exemple, on peut compter les distances en kilomètres sur une route, à partir d'un point donné, en les considérant comme positives dans un sens et négatives dans l'autre. Un voyageur qui suit toujours la même route marquera sur son carnet : $-a$ kilomètres, $+b$ kilomètres, etc.. suivant le sens dans lequel il aura marché. De même, les degrés de température peuvent être comptés positivement ou négativement : $4^{\circ},6$ au-dessus de zéro, ou $+4^{\circ},6$; $5^{\circ},2$ au-dessous de zéro, ou $-5^{\circ},2$. Une époque pourra être affectée d'un signe : l'an -30 d'une ère donnée indiquera la trentième année avant le début de cette ère (**324**). Une cote (**297**) peut être prise au-dessus ou au-dessous du niveau de la mer. Un arc de cercle peut être compté dans deux sens différents (**164**) etc.. etc.. Le nombre 0 peut être considéré à volonté comme positif ou négatif.

On appelle *valeur absolue* d'un nombre algébrique sa valeur prise indépendamment de tout signe extérieur. En se bornant à des valeurs absolues, on dira par exemple : la température a varié de 2°, sans dire si elle a baissé ou non ; un voyageur a fait $6^{km},400$, etc.. Deux nombres de même valeur absolue, mais de signes différents, sont dits *égaux et de signes contraires* ou *symétriques*. La seconde expression est préférable à la première, car le mot « égaux » est impropre, les deux nombres étant différents : $4^{f},75$ (recette de $4^{f},75$) n'est pas égal pour un commerçant à $-4^{f},75$ (dépense de $4^{f},75$).

66. — On peut donner l'interprétation géométrique suivante des nombres positifs et négatifs. Prenons sur une ligne droite indéfinie (*fig.* 10) une origine O. Portons plusieurs fois de suite

Fig. 10

l'unité de longueur (ici le demi-centimètre) vers la droite et vers la gauche, puis numérotons ces points en faisant précéder cha-

que numéro du signe + ou — suivant que le point est à droite ou à gauche de O. Par exemple le point A marqué —3 est à 3 centimètres de O vers la gauche. De même le point M étant à $4^{cm}\frac{2}{5}$ à gauche de O, correspondra au nombre $-4\frac{2}{5}$. On voit qu'à chaque nombre positif ou négatif correspond un point et un seul de la droite, et inversement à chaque point de cette droite correspond un nombre et un seul qu'on appelle son *abscisse* (**240**).

Une longueur telle que OA, se désigne par $\overline{OA}$ et est appelée un *segment* ou *vecteur*, pour indiquer qu'il s'agit d'une ligne parcourue de O vers A, tandis que $\overline{AO}$ serait la même longueur parcourue de A vers O. Le vecteur $\overline{OA}$ admet le point O comme *origine* et le point A comme *extrémité*. On voit encore sur la figure que $\overline{AB} = +8^{cm}$, car il y a 8 centimètres de A à B et que de plus le chemin est parcouru dans le sens positif. On a par contre $\overline{BA} = -8^{cm}$. On voit que $\overline{AB} + \overline{BA} = 0$. Cette remarque est générale quelle que soit la disposition des points A et B.

Si l'on prend deux points A et A′ ayant des abscisses « égales et de signes contraires », on voit qu'ils sont symétriques par rapport au point O (**196**) ; c'est pour cette raison que l'on dit que les deux nombres $+a$ et $-a$ sont *symétriques*.

67. Somme algébrique. — L'addition ou somme algébrique de deux nombres algébriques se définit comme il suit : *si deux nombres sont de même signe, leur somme algébrique s'obtient en ajoutant leurs valeurs absolues et affectant le résultat de leur signe commun. S'ils sont de signes contraires, on fait la différence de leurs valeurs absolues et l'on affecte le résultat du signe de celui des deux nombres qui a la plus grande valeur absolue :*

$$(+3)+(+8)=+11 \qquad (-3)+(+8)=+5$$
$$(-3)+(-8)=-11 \qquad (+3)+(-8)=-5.$$

Les parenthèses sont destinées à éviter toute confusion entre le signe + de l'addition et les signes + ou — qui indiquent que le nombre est positif ou négatif (**70**).

Si deux nombres sont égaux et de signes contraires, leur somme est nulle : $(-8) + (+8) = 0$.

Pour obtenir la somme algébrique de plusieurs nombres, on ajoute le second au premier, puis le troisième à la somme déjà obtenue, et ainsi de suite.

Ces définitions sont très commodes dans la pratique. Un caissier qui désire connaître l'état de sa caisse à la fin de la journée fera la somme algébrique des divers nombres représentant des opérations. S'il a marqué -7^{fr} et -3^{fr} (de somme algébrique -10^{fr}, d'après la règle ci-dessus), c'est bien un déboursé total de 10 francs qui exprime le résultat de ces deux déboursés partiels. S'il a marqué -7^{fr} et $+3^{fr}$ (de somme algébrique -4^{fr}), le résultat d'une dépense de 7 francs et d'une recette de 3 francs est bien une dépense de 4 francs. Il en est de même dans tous les autres cas.

On peut interpréter la somme algébrique de plusieurs nombres à l'aide de la théorie des vecteurs. Prenons la somme algébrique : $(-3) + (+8)$, qui est égale à $+5$ d'après la définition. On voit (*fig.* 11) que -3 peut être représenté par $\overline{OA}$, $+8$ par $\overline{AB}$ et que $+5$ est précisément le vecteur $\overline{OB}$. Nous

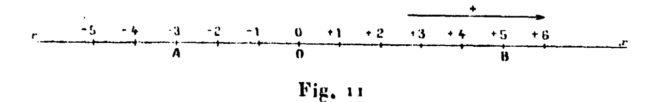


Fig. 11

laissons au lecteur le soin de vérifier qu'il en est de même dans tous les cas. Donc : *pour effectuer la somme algébrique de plusieurs nombres représentés par des vecteurs, il suffit de les porter bout à bout, l'origine de chacun d'eux coïncidant avec l'extrémité du précédent ; le vecteur qui a l'origine du premier vecteur pour origine et l'extrémité du dernier comme extrémité représente la somme cherchée* (**240**).

Le lecteur pourra comparer cet exemple à celui des augmentations ou diminutions de longueur de la colonne mercurielle d'un thermomètre, ou à celui, déjà cité, d'un voyageur qui parcourt une route dans des sens différents ; ce voyageur saura à quelle distance il se trouve de son point de départ s'il fait la

somme algébrique des nombres exprimant ses déplacements successifs.

68. — La somme algébrique de plusieurs nombres jouit de la plupart des propriétés de la somme arithmétique (**4**).

La somme algébrique de plusieurs nombres ne change pas quand on intervertit l'ordre de ces nombres. En particulier on peut évaluer la somme de plusieurs nombres en faisant d'abord la somme des nombres positifs, puis celle des nombres négatifs, et enfin la somme algébrique des deux derniers résultats. L'addition algébrique est une opération *commutative.*

Une somme algébrique ne change pas quand on remplace deux ou plusieurs de ses termes par leur somme effectuée. L'addition algébrique est une opération *associative.*

Ces deux propriétés apparaissent clairement sur les exemples qui précèdent : l'ordre dans lequel s'effectuent les diverses opérations, recettes ou dépenses, d'un caissier ne peut pas influer sur leur résultat final. On peut d'ailleurs les établir par des raisonnements théoriques directs, que nous ne donnerons pas en détail. Pour la première propriété, on montrerait : 1° que, pour additionner deux nombres, on peut intervertir leur ordre sans changer leur résultat ; 2° que, pour additionner plusieurs nombres, on peut intervertir l'ordre des deux derniers ; 3° que, dans le même cas, on peut intervertir deux nombres quelconques ; 4° que, pour plusieurs nombres, on peut les intervertir de façon arbitraire. De même, on montrerait que deux ou plusieurs nombres peuvent être remplacés par leur somme effectuée, en amenant par des échanges successifs ces nombres à être en tête de la somme, ce qui rend la propriété évidente.

69. Soustraction algébrique. — *Etant donnés deux nombres algébriques, retrancher le second du premier, c'est trouver un troisième nombre qui, ajouté au second, reproduise le premier.*

La soustraction algébrique se ramène à une addition : *pour retrancher un nombre algébrique, on peut l'ajouter après avoir*

changé son signe. Supposons, en effet, que la soustraction à effectuer soit $a - (+b)$, le signe de b étant seul mis en évidence.

Le résultat de cette soustraction étant c, on a par définition :

$$c + (+b) = a.$$

Ajoutons $-b$ aux deux membres de cette égalité, on a :

$$c + (+b) + (-b) = a + (-b)$$

mais $(+b) + (-b) = 0$; donc :

$$c = a + (-b).$$

On montrerait de même que la règle est encore exacte quand b est précédé du signe —. Par exemple :

$$(+3) - (+5) = (+3) + (-5) = -2$$
$$(-2) - (-4) = (-2) + (+4) = +2.$$

L'interprétation pratique de cette définition à l'aide des exemples précédents est ici un peu plus délicate que dans le cas de l'addition. Si un caissier a $+ 7^{fr}$, c'est-à-dire s'il a un capital de 7 francs, retrancher de son avoir $+ 7^{fr}$ revient à lui ajouter -7^{fr}, c'est-à-dire à lui faire inscrire une dépense de 7 francs. Si ce même caissier a -7^{fr}, c'est-à-dire une dette de 7 francs, retrancher de son avoir cette somme de -7^{fr}, c'est-à-dire supprimer cette dette, revient à ajouter à son avoir $+ 7^{fr}$ et à faire inscrire au caissier une recette de 7 francs. Dans les deux cas retrancher un nombre revient donc à ajouter le nombre égal et de signe contraire.

Une soustraction se ramenant à une addition, on en déduit les propriétés suivantes déjà données en arithmétique (**4**) :

Pour retrancher une somme donnée d'un nombre, on peut retrancher successivement de ce nombre les diverses parties de cette somme, et inversement, au lieu de retrancher successivement plusieurs nombres, on peut retrancher leur somme algébrique.

Pour ajouter à un nombre la différence de deux autres, on peut ajouter le premier de ces deux nombres et ensuite retran-

cher l'autre, l'ordre des deux opérations pouvant d'ailleurs être interverti.

Pour retrancher d'un nombre la différence de deux autres, on peut retrancher le premier et ajouter le second, l'ordre de ces opérations pouvant être interverti.

$$
\begin{aligned}
(-4)-(-3)-(-2) &= (-4)-(-3)+(+2)\\
&= (-4)+(+3)+(+2)\\
&= (-1)+(+2) = +1.
\end{aligned}
$$

Comme on le voit, une suite quelconque d'opérations algébriques, additions ou soustractions, peut se ramener à une somme algébrique.

On a ainsi en appliquant les règles ci-dessus :

$$
\begin{aligned}
-\{[(-3)+(+2)]-[(-4)-(+6)]\}-(-5)&\\
&= -[(-3)+(+2)-(-4)+(+6)]+(+5)\\
&= -[(-3)+(+2)+(+4)+(+6)]+(+5)\\
&= (+3)+(-2)+(-4)+(-6)+(+5).
\end{aligned}
$$

On est ainsi ramené à une somme algébrique dans laquelle chaque terme est affecté d'un signe + ou — suivant que le total des signes — qui le précèdent, dans l'expression primitive, est pair ou impair.

Il ne reste plus qu'à effectuer la somme algébrique de ces termes :

$$
\begin{aligned}
(+3)+(-2)+(-4)+(-6)+(+5)&\\
&= (+1)+(-4)+(-6)+(+5)\\
&= (-3)+(-6)+(+5)\\
&= (-9)+(+5) = -4.
\end{aligned}
$$

70. — Jusqu'à présent les nombres positifs et négatifs formaient une classe nouvelle de nombres distincts des nombres arithmétiques, *nous conviendrons désormais de considérer un nombre positif comme identique à sa valeur absolue* : $+5 = 5$. Il ne reste plus maintenant qu'une seule catégorie de nombres nouveaux : ce sont les nombres négatifs.

A l'aide de cette remarque, le calcul précédent peut s'effectuer sous forme plus rapide :

$$-\{[(-3)+(+2)]-[(-4)-(+6)]\}-(-5)$$
$$=-\{[-3+2]-[-4-6]\}-(-5)$$
$$=3-2-4-6+5=1-4-6+5$$
$$=-3-6+5=-9+5=-4.$$

Nous avons dit qu'il ne fallait pas confondre les signes + et — d'opération avec les mêmes signes indiquant qu'un nombre est positif ou négatif (**67**). Le lecteur voit maintenant que cette recommandation n'a plus d'importance, la confusion ne pouvant entraîner aucune erreur.

Nous terminerons par une remarque sur le sens qu'il faut attribuer à une égalité telle que $3-4=-1$, égalité qui ne signifie rien en arithmétique. S'il s'agit de grandeurs ne pouvant être comptées que dans un sens, elle n'a aucune signification : on ne peut pas prendre 4 litres d'eau dans un réservoir qui n'en contient que 3. Mais si les grandeurs considérées peuvent être comptées dans deux sens différents, cette égalité a une signification très nette : si le thermomètre marque 3° au-dessus de zéro, et que la température baisse de 4°, il marquera —1°, c'est-à-dire 1° au-dessous de zéro.

71. Multiplication algébrique. — Avant de donner la définition du produit de deux nombres algébriques, nous allons étudier en détail un exemple simple, dans lequel on est amené à considérer le produit de deux nombres algébriques.

Prenons un point E qui se déplace sur une droite indéfinie $x'x$ (*fig.* 12) d'un *mouvement uniforme*, c'est-à-dire qui parcourt

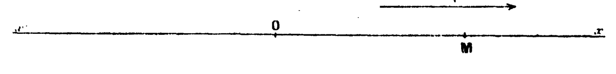


Fig. 12

des chemins ou, comme on le dit, des *espaces* égaux dans des temps égaux. Le chemin v parcouru en une seconde est la *vitesse* du point (**326**). En t secondes, le chemin parcouru est vt.

Si l'on prend comme origine des abscisses le point O, où se trouve le point mobile à l'origine des temps, ou *temps zéro* (**324**), au temps t le point se trouvera en M, ayant parcouru l'espace : $e = vt$.

Nous ne nous sommes préoccupés jusqu'ici que des valeurs absolues de e, v, t. Nous supposons maintenant que t est positif pour toute époque postérieure au temps zéro, et négatif pour toute époque antérieure ; que $e = \overline{OM}$ est positif pour toute position de M à droite de O, le sens positif sur $x'x$ étant le sens de la flèche, et négatif pour M à gauche de O. Enfin v est positif, si en une seconde le point parcourt un segment positif, c'est-à-dire se déplace dans le sens de la flèche, v est négatif si le déplacement a lieu en sens contraire.

Ces diverses conventions étant faites, on voit d'abord que, dans tous les cas, la valeur absolue de e est le produit des valeurs absolues de v et t. Il reste à examiner comment le signe de e est lié à ceux de v et t.

1° Si v est positif, le point M se déplace dans le sens de la flèche. Donc, après son passage en O, il est à gauche de O : e et t sont positifs ; avant son passage en O, il est à gauche de O : e et t sont négatifs.

2° Si v est négatif, M va en sens inverse de la flèche ; après son passage en O, il est à gauche de O : e est négatif et t positif ; avant son passage en O, il est à droite de O : e est positif et t négatif.

Si donc l'on veut pouvoir écrire dans tous les cas $e = vt$, il faut, comme le lecteur le verra sans peine, donner à e le signe + quand v et t sont de mêmes signes et le signe — dans le cas contraire. On obtient les mêmes résultats dans tous les cas où l'on se trouve amené à donner une signification au produit de deux nombres algébriques. Ceci explique pourquoi on a adopté la définition suivante :

72. — *On appelle produit de deux nombres algébriques un nouveau nombre algébrique, dont la valeur absolue est le produit des valeurs absolues des deux facteurs, et dont le signe extérieur*

est le signe + si les deux nombres donnés sont de même signe, et — s'ils sont de signes contraires ;

$(+3) \cdot (+4) = +12$ ou plus simplement $3 \cdot 4 = 12$
$(-3) \cdot (+4) = -12$ » » $(-3) \cdot 4 = -12$
$(+3) \cdot (-4) = -12$ » » $3 \cdot (-4) = -12$
$(-3) \cdot (-4) = +12$ » » $(-3) \cdot (-4) = 12.$

On aurait de même :

$$3\frac{2}{7} \cdot (-7) = -23 \qquad (-4{,}7) \cdot 3{,}07 = -14{,}429.$$

En particulier, multiplier un nombre par $+1 = 1$ ne l'altère pas ; le multiplier par -1 revient à le changer de signe.

Le produit de plusieurs facteurs s'obtient, comme dans le cas des nombres arithmétiques, en effectuant les diverses opérations dans l'ordre où elles se présentent.

La règle ci-dessus permettant de trouver le signe du produit s'appelle *règle des signes* et s'énonce parfois sous la forme :

+ par + donne + + par — donne —
— par + donne — — par — donne +.

Dans le cas de plusieurs facteurs elle revient à la suivante : *Le signe extérieur du produit de plusieurs facteurs est + ou — suivant que le nombre des facteurs négatifs est pair ou impair.*

L'extension aux nombres algébriques des propriétés concernant les produits des nombres arithmétiques (**6, 7**) est immédiate dans tous les cas. C'est ainsi que *le produit de plusieurs facteurs ne change pas quand on intervertit l'ordre de ces facteurs*, car la valeur absolue ne change pas, puisque c'est le produit des valeurs absolues et que le signe extérieur ne dépendant que du nombre des facteurs négatifs est aussi toujours le même. La multiplication est une opération *commutative.*

On établirait de même les diverses propriétés qui suivent :

Dans un produit, de plusieurs facteurs, on peut remplacer deux ou plusieurs facteurs par leur produit effectué ; la multiplication est une opération *associative.*

Pour multiplier une somme algébrique par un nombre, on peut effectuer séparément le produit du nombre par les divers termes de la somme, puis faire la somme algébrique des résultats.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un produit de plusieurs facteurs soit nul est que l'un au moins des facteurs le soit.

73. Puissances. — La définition de la puissance $n^{\text{ième}}$ d'un nombre a est la même que dans le cas où a est un nombre arithmétique. On voit que la valeur absolue de la puissance $n^{\text{ième}}$ de a est la puissance $n^{\text{ième}}$ de la valeur absolue de a. Quant au signe, il dépend du signe de a et de la parité de n. On verra que, si a est positif, toutes ses puissances sont positives, et si a est négatif, ses puissances d'ordre pair (n pair) sont positives et ses puissances d'ordre impair (n impair) sont négatives.

En particulier : *le carré d'un nombre est toujours positif*, d'où il résulte qu'un nombre négatif n'a jamais de racine carrée (**106**).

Ici encore l'extension aux nombres algébriques des propriétés des nombres arithmétiques est immédiate (**9**). On a par exemple les énoncés suivants ;

Le produit de deux puissances d'un même nombre est une nouvelle puissance de ce nombre ayant pour exposant la somme des exposants des deux puissances données.

Pour élever une puissance d'un nombre à une certaine puissance, il suffit de multiplier les deux exposants l'un par l'autre pour avoir le nouvel exposant du nombre donné.

On aura encore les propriétés suivantes (**86**) :

Le carré d'une somme de deux nombres s'obtient en ajoutant à la somme des carrés des deux nombres leur double produit.

Le carré de la différence de deux nombres s'obtient en retranchant de la somme des carrés des deux nombres leur double produit.

Le produit de la somme de deux nombres par leur différence est égal à la différence de leurs carrés.

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \qquad (a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$
$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2.$$

74. Division algébrique. — *On appelle quotient de deux nombres algébriques un troisième nombre qui, multiplié par le second, reproduise le premier.*

Nous avons vu que, grâce à l'introduction des fractions, un tel quotient existait toujours pour deux nombres arithmétiques (**25**), pourvu cependant que le diviseur ne soit pas nul (**10**). Nous allons voir qu'ici encore il y a toujours un quotient. Diviser a par b, c'est en effet par définition trouver q tel que l'on ait : $a = bq$. La valeur absolue d'un produit a étant le produit des valeurs absolues des facteurs b et q, la valeur absolue du quotient q sera le quotient des valeurs absolues du dividende a et du diviseur b. Quant au signe de ce quotient, on verra aisément que, si a et b sont de même signe, q doit être positif, et s'ils sont de signes contraires, q doit être négatif. Le nombre q ainsi défini sans ambiguïté répond bien à la définition donnée, et il est facile de voir qu'il ne peut pas y en avoir d'autre.

On remarquera que le signe du quotient de deux nombres a et b est donné par la même règle que le signe du produit de ces deux mêmes nombres.

Les propriétés des quotients ou fractions algébriques sont les mêmes que celles des quotients ou fractions arithmétiques (**22**). On pourra par exemple sans changer la valeur du quotient multiplier le dividende et le diviseur par un même nombre. La multiplication et la divison des fractions algébriques se feront comme celles des fractions arithmétiques (**26**) etc... De même encore, on étendra immédiatement aux nombres algébriques les définitions et les propriétés des rapports et proportions (**37** et suivants).

75. Inégalités. — *On dit qu'un nombre a est plus grand qu'un nombre b si la différence a — b est positive.* Dans le cas contraire a est dit inférieur à b. On emploie encore les signes $>$ et $<$ (**11**). Si nous reprenons l'interprétation géométrique des nombres algébriques en les considérant comme abscisses de points d'une droite (**66**), nous voyons qu'un vecteur $\overline{OA}$ (*fig.* 13) est

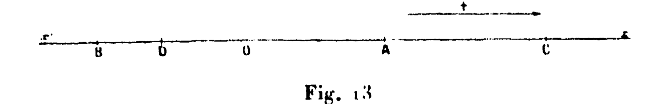


Fig. 13

considéré comme plus grand qu'un vecteur $\overline{OB}$ si A est à droite de B. En particulier, *un nombre positif est toujours plus grand qu'un nombre négatif* $(\overline{OA} > \overline{OB})$. *De deux nombres positifs, le plus grand est celui qui a la plus grande valeur absolue* $(\overline{OC} > \overline{OA})$. *De deux nombres négatifs, le plus grand est celui qui a la plus petite valeur absolue* $(\overline{OD} > \overline{OB})$.

Cette définition des mots « plus grand que » et « plus petit que » peut s'appliquer aux nombres arithmétiques et elle est alors identique à celle que nous avions déjà donnée.

Ici l'extension des propriétés données pour les nombres arithmétiques conduirait souvent à des inexactitudes. Par exemple, nous avons vu que l'on a pour des nombres arithmétiques : $a + b > a$, quel que soit b non nul. Or l'inégalité : $3 + (-2) > 3$ est inexacte. Il faut modifier comme il suit l'énoncé :

En ajoutant à un nombre un autre nombre positif, non nul, on obtient un nombre plus grand que le premier. Si le nombre ajouté est négatif, on obtient un résultat plus petit.

On ne change pas le sens d'une inégalité en ajoutant (ou en retranchant) un même nombre dans les deux membres de l'inégalité. C'est ainsi que $a > b$ entraîne : $a + c > b + c$, car ces deux inégalités sont identiques par définition à :

$$a - b > 0 \quad \text{et} \quad (a + c) - (b + c) > 0$$

et que d'autre part $(a + c) - (b + c) = a - b$.

On peut ajouter membre à membre deux inégalités de même sens. De $a > b$ et $c > d$, on déduit $a + c > b + d$, car $a - b$ et $c - d$ étant positifs il en sera de même de leur somme : $(a + c) - (b + d)$.

On ne change pas le sens d'une inégalité en multipliant ses deux membres par un même nombre positif, mais on change son sens si on les multiplie par un même nombre négatif. Soit en effet l'inégalité $a > b$ et m un facteur positif. Le produit $(a - b)m = am - bm$ de deux facteurs positifs est aussi positif. On a donc : $am - bm > 0$ c'est-à-dire $am > bm$. Au contraire si m est négatif, le produit $(a - b) m = am - bm$ est négatif et l'on aura : $am < bm$.

On ne peut pas en général multiplier membre à membre deux inégalités, même quand elles sont de même sens. Par exemple $-3 < 1$ et $-2 < 1$ donneraient $6 < 1$, ce qui est inexact. En particulier : *on n'a pas le droit d'élever les deux termes d'une inégalité au carré*, au moins en général (**101**).

On ferait des remarques analogues sur l'élévation à une puissance quelconque des deux termes d'une inégalité.

Exercices. — N°s 101, 102. 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 116, 117.

CHAPITRE II

CALCUL ALGÉBRIQUE

76. Formules. — La solution numérique d'un problème ne garde pas la trace des opérations effectuées pour l'obtenir. Supposons par exemple qu'un emballeur veuille savoir le poids d'une caisse de dimensions $0^m,45 \times 0^m,60 \times 0^m,80$, les planches employées pesant 7 kilogrammes par mètre carré. Le calcul donne $15^{kg},54$. Mais ce résultat ne rappelle en rien la suite des opérations qu'il suppose. Si au contraire nous désignons par a, b, c, les trois dimensions de la caisse, par p le poids par mètre carré des planches employées, nous verrons aisément que la surface totale est $2(ab + bc + ca)$ (**275**), et par suite le poids cherché P est donné par :

$$P = 2p(ab + bc + ca).$$

Une telle *formule* donne le résultat numérique demandé si l'on remplace les lettres par leur valeur :

$$\begin{aligned} P &= 2 \cdot 7(0,45 \cdot 0,60 + 0,60 \cdot 0,80 + 0,80 \cdot 0,45) \\ &= 2 \cdot 7(0,27 + 0,48 + 0,36) = 14 \cdot 1,11 = 15,54. \end{aligned}$$

Il y a un grand avantage à l'emploi de telles formules. Si le même emballeur veut calculer le poids d'une seconde caisse de dimensions différentes et faite avec des planches plus minces ou plus épaisses, il ne sera pas obligé de refaire le raisonnement précédent, mais il lui suffira de changer les valeurs numériques données aux lettres a, b, c, p. Ce procédé qui con-

siste, d'une part, à désigner par des lettres les quantités que l'on veut étudier, et, d'autre part, à donner comme solution d'un problème une formule et non pas un nombre est d'une importance capitale; c'est surtout à lui que l'on doit le développement pris par les mathématiques depuis le XVIe siècle. Viète fut à cette époque l'un des premiers algébristes.

77. — Il peut d'ailleurs arriver que plusieurs problèmes donnent la même formule. Le poids P d'un corps est le produit du nombre a de centimètres cubes de ce corps par le poids b du centimètre cube : $P = a \cdot b$. Le prix P d'une pièce de drap est le produit du nombre a de mètres par le prix b du mètre : $P = a \cdot b$.

Si maintenant on transforme une telle formule $P = a \cdot b$, en l'écrivant par exemple $a = \frac{P}{b}$, et cela sans se préoccuper de savoir quelle est la signification des lettres P, a, b, on aura traité simultanément deux problèmes différents, consistant, le premier, à chercher le volume a d'un corps connaissant le poids b du centimètre cube et le poids total P ; le deuxième, à chercher la longueur a d'une pièce de drap connaissant le prix b du mètre et le prix total P.

L'Algèbre est la partie des Mathématiques qui s'occupe plus particulièrement de ces transformations de formules, transformations que l'arithmétique, la géométrie, la mécanique, la physique, etc... traduisent en langage précis, en donnant aux diverses lettres de ces formules des significations particulières. Dans tout ce qui suit, nous laisserons donc de côté l'origine des formules que nous étudierons, nous bornant à indiquer comment on peut les classer et les simplifier.

78. Expressions algébriques. — *On appelle expression algébrique tout groupe de lettres ou nombres reliés entre eux par des signes d'addition, de soustraction, de multiplication, d'extraction de racines.*

$$\frac{4a^3b - c\sqrt{3}}{d + 5e} \qquad \frac{a + \sqrt[3]{b}}{a - \sqrt[3]{b}} \qquad (a+b)^3 - (a-b)^3 \qquad 2p(ab + bc + ca)$$

sont des expressions algébriques. La valeur que prend l'une d'elles, par exemple $2p(ab + bc + ca)$, quand on y remplace les lettres a, b, c, p, par des nombres, est la *valeur numérique* de l'expression. Pour $a = 0,45$; $b = 0,60$; $c = 0,80$; $p = 7$ on trouve $15,54$ comme nous l'avons déjà vu (**76**).

On suppose d'ailleurs, pour plus de généralité, que les lettres d'une expression algébrique peuvent représenter des nombres positifs ou négatifs.

Il y a quelques remarques à faire sur l'ordre dans lequel doivent être faits les calculs indiqués. Si l'on ne fait pas de conventions précises, une expression telle que $a + bc$ pourra signifier qu'il faut ajouter a à b pour multiplier le résultat par c, ou bien qu'il faut ajouter à a le produit de b par c. La deuxième interprétation est seule exacte. La première suite d'opérations serait représentée par $(a + b)c$. De façon générale, *on effectue d'abord toutes les multiplications et divisions indiquées ; les additions et soustractions se font ensuite*. D'autre part, *dans les fractions on calcule séparément tout ce qui est au-dessus de la barre de fraction et tout ce qui est au-dessous*. Enfin *toute quantité entre parenthèses* ( ), *entre crochets* [ ], *ou sous un radical, se calcule également à part*. Cherchons à titre d'exemple la valeur numérique de l'expression : $\dfrac{[(a-b)c+a]d^2}{c^2\left(b-\sqrt{a+(b+c)\dfrac{d}{e}}\right)} - \dfrac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}$

pour $a = 4$; $b = 1$; $c = 3$; $d = -6$; $e = -2$. On a :

$$\frac{[(4-1)3+4](-6)^2}{3^2\left(1-\sqrt{4+(1+3)\dfrac{-6}{-2}}\right)} - \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt{1}-\sqrt{4}} = \frac{(3.3+4).36}{9(1-\sqrt{4+4.3})} - \frac{1}{1-2}$$

$$= \frac{13.36}{9(1-\sqrt{16})} - \frac{1}{-1} = \frac{13\,.\,36}{9(-3)} + 1 = \frac{13.4}{-3} + 1 = \frac{52}{-3} + 1 = -\frac{49}{3}.$$

Nous supposons que, dans tous les cas, les valeurs numériques données aux lettres sont telles que le calcul puisse s'effectuer jusqu'au bout. Par exemple, dans $\dfrac{a}{b-c}$, nous ne donnerons pas à b et c des valeurs égales, car on ne sait pas diviser un

nombre par zéro. Dans $a - \sqrt{b}$, nous ne donnerons pas à b de valeur négative, car un nombre négatif n'a jamais de racine carrée (**73**). La question est parfois plus complexe qu'il ne le semble au premier abord. Dans $\sqrt{a - \sqrt{b}}$, si $a = 1$, on ne peut pas donner à b la valeur 4, bien que $\sqrt{4}$ puisse se calculer, car l'on aurait $\sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{1 - 2} = \sqrt{-1}$, ce qui n'a aucune signification.

79. — On classe souvent les expressions algébriques suivant le degré de complication des opérations qu'il faut effectuer pour avoir leur valeur numérique, connaissant les valeurs des lettres qui y entrent.

Une expression algébrique est dite rationnelle lorsqu'aucune lettre n'y figure sous un radical : $\frac{ab}{c}$, $a + \sqrt{2}b$; $\frac{a-b}{c+d}$. Elle est *irrationnelle* dans le cas contraire : $\sqrt{a}$; $a + \sqrt{b}$; $\frac{a}{b - \sqrt{a-b}}$.

Une expression rationnelle est dite entière lorsqu'elle ne contient aucune lettre au dénominateur : $ax^2 + bx + c$; $\left(a + \frac{2}{3}b - c\right)(b + c) - 2a$; $4a^3b - xy^2$; sinon elle est dite *fractionnaire* : $\frac{a-b}{c}$; $\frac{1}{a}$.

Deux expressions algébriques sont dites équivalentes, lorsqu'elles prennent toujours la même valeur numérique, si l'on donne les mêmes valeurs aux lettres qui y entrent. L'égalité de deux expressions équivalentes s'appelle une *identité*. On a vu (**73**) que $(a + b)(a - b)$ et $a^2 - b^2$ prennent toujours les mêmes valeurs numériques, quelles que soient les valeurs numériques données à a et b. Ce sont donc deux expressions équivalentes, et l'on a l'identité :

$$(a + b)(a - b) \equiv a^2 - b^2.$$

On emploie souvent pour des identités le signe $\equiv$ au lieu du signe $=$.

On a toujours le droit de remplacer une expression algébrique par une expression équivalente, puisque les résultats

numériques sont toujours les mêmes. Une des principales méthodes de l'Algèbre consiste précisément à remplacer les expressions considérées par des expressions équivalentes, mais plus avantageuses pour le calcul.

80. — Nous allons terminer ces généralités sur les expressions algébriques par quelques remarques sur le choix des lettres qui y rentrent. Théoriquement ce choix est complètement arbitraire, mais dans la pratique il y a certaines règles qu'indique l'usage et qu'il est bon de suivre. Prenons une comparaison : il est certain que l'on pourrait faire un volume de mathématiques en échangeant partout les deux signes + et =, pourvu que la convention en fût faite une fois pour toutes, mais cela serait gênant pour le lecteur qui verrait des égalités telles que : $3 = 4 + 7$. C'est pour des raisons analogues qu'il vaut mieux se conformer aux notations généralement adoptées par les mathématiciens. Par exemple les premières lettres de l'alphabet : a, b, c, d, ... servent de préférence à désigner des données, et les dernières : $x, y, z, t, u, v, w,$... les inconnues. Il y a en outre certaines associations de lettres qui sont plus familières que d'autres : trois quantités seront désignées, suivant les cas, par a, b, c; par l, m, n; par p, q, r; par u, v, w; par x, y, z; etc... L'emploi des majuscules : A, B, C,... des lettres grecques : α, β, γ,... [1], des accents : a'; a'', a''',... (que l'on énonce *a prime*, *a seconde*, *a tierce*;...), des indices : a_1, a_2, ... a_1^2, a_1^3..., a_2^1..., etc., n'est pas non plus indifférent; mais nous n'insisterons pas davantage sur ce sujet pour lequel la pratique est le meilleur des guides.

81. Polynomes. — Nous allons étudier maintenant les expressions algébriques les plus simples, c'est-à-dire les expressions entières. Nous verrons (**86**) qu'on peut toujours faire disparaître les parenthèses et les écrire par suite sous la forme

---

[1] Voir à la fin du volume le tableau des lettres grecques les plus employées en mathématiques.

d'une somme algébrique de termes :

$$4x^3 - 3x^2y + y^2 - 3 \qquad ax + b \qquad x^m - a^m \qquad x^3 + px + q.$$

On les appelle alors des polynomes entiers, ou, par abréviation, des *polynomes*. Les termes : $4x^3$; $-3x^2y$; y^2 ; -3 ; .... s'appellent parfois des *monomes* ; un polynome qui n'a que deux termes, comme $ax + b$ ou $x^m - a^m$, est un *binome*, et s'il en a trois, comme $x^3 + px + q$, c'est un *trinome*.

Un monome s'obtient donc uniquement par la multiplication de lettres ou de nombres. Si l'on remarque que l'ordre de ces facteurs peut être modifié sans changer la valeur du résultat numérique, on pourra parfois simplifier la forme d'un monome : c'est ainsi que

$$\left(-\frac{2}{9}\right) \times x \times a \times (-3) \times x \times x \times b \times (-y) \times b$$

peut s'écrire :

$$\left(-\frac{2}{9}\right) \times 3 \times x \times x \times x \times y \times a \times b \times b = -\frac{2}{3}x^3yab^2.$$

On écrit toujours un monome comme ci-dessus, avec en tête un nombre, positif ou négatif, qu'on appelle le *coefficient numérique*. (Cependant, s'il y a un radical, on l'écrit le plus souvent à la fin : $-ab\sqrt{3}$; $\frac{3}{4}ab\sqrt{5}$; ...) Quand ce coefficient est égal à 1, on ne l'écrit pas : a^3b^2c.

On appelle *degré d'un monome* la somme des exposants des lettres qui y entrent. Toute lettre sans exposant est considérée comme ayant l'exposant 1. Ainsi x^3yab^2 est de degré : $3 + 1 + 1 + 2 = 7$. Si un monome est réduit à un coefficient : $-\frac{2}{3}$ par exemple, il est dit de degré zéro.

Le *degré d'un polynome* est celui du terme qui a le plus fort degré : $-x^4 - 3x^2 + ay^2 + b + x^3 - 6$ est du quatrième degré.

Un polynome est *homogène* si tous ses termes sont de même degré : $-x^4 - 3ax^2 + a^2y^2 + b^4 + a^3x$ est homogène et de degré 4. Un polynome est *symétrique* par rapport à deux lettres x et y si l'on peut les permuter sans changer le polynome :

$x^4 - 2a^2xy + y^4$ est symétrique en x et y et est de plus homogène et de degré 4.

82. — Nous avons vu qu'on pouvait parfois simplifier la forme d'un monome en groupant convenablement les lettres. On peut de même simplifier un polynome en réunissant les *termes semblables*, c'est-à-dire ceux qui ne diffèrent que par leurs coefficients numériques, et en effectuant leur somme algébrique. C'est ce qu'on appelle *réduire les termes semblables*. Ainsi dans :

$$7x^4 - 3x^2y + xy^2 - 5x^2y + 5x^3 - 8x^4 - xy^2 + 2x^2y$$

$7x^4$ et $-8x^4$ sont des termes semblables, il en est de même de $-3x^2y$; $-5x^2y$; $2x^2y$ et aussi de xy^2 et $-xy^2$. Rapprochons ces termes pour pouvoir effectuer leur somme algébrique :

$$\begin{aligned} &7x^4 - 3x^2y + xy^2 - 5x^2y + 5x^3 - 8x^4 - xy^2 + 2x^2y \\ &= 7x^4 - 8x^4 - 3x^2y - 5x^2y + 2x^2y + xy^2 - xy^2 + 5x^3 \\ &= (7-8)x^4 + (-3-5+2)x^2y + (1-1)xy^2 + 5x^3 \\ &= -x^4 - 6x^2y + 5x^3. \end{aligned}$$

Il faut être familiarisé avec ce genre de simplifications, qui est d'un emploi fréquent en algèbre.

Il arrive souvent que dans un polynome, il y ait une seule lettre, ou bien que l'on considère une des lettres qui y entrent à l'exclusion de toutes les autres : il est alors commode d'écrire les termes de ce polynome dans un ordre tel que les exposants de cette lettre, dans les divers termes, aillent toujours en décroissant, ou toujours en croissant. On dit alors que le polynome est *ordonné suivant les puissances décroissantes ou croissantes* de cette lettre. Ceci facilite la réduction des termes semblables ; le polynome :

$$7x^4 - 4x^5 - 8x^3 + 7x^2 - x^4 + x^3 - 2x^2 + x^3 - 8x - 5x^2 + 3$$

peut s'écrire :

$$\begin{aligned} &-4x^5 + 7x^4 - x^4 - 8x^3 + x^3 + x^3 + 7x^2 - 2x^2 - 5x^2 - 8x + 3 \\ &= -4x^5 + 6x^4 - 6x^3 - 8x + 3. \end{aligned}$$

Sous cette forme, il est ordonné suivant les puissances décroissantes de x. Il serait ordonné suivant les puissances croissantes sous la forme : $3 - 8x - 6x^3 + 6x^4 - 4x^5$.

De même le polynome homogène :

$$4x^3 - 3x^2y + xy^2 - y^3$$

est ordonné suivant les puissances décroissantes de x et suivant les puissances croissantes de y.

Le *degré d'un polynome en x* est l'exposant de la plus haute puissance de x qui y entre, après réduction des termes semblables, s'il y a lieu :

$$x^4 + x^3 - x^4 + 2x^2 - 1 + 3x^2 = x^3 + 5x^2 - 1$$

est du troisième degré en x.

Enfin on appelle parfois *polynome complet en x* un polynôme ordonné dans lequel l'exposant décroît constamment d'une unité d'un terme à l'autre, le dernier terme ne contenant pas la lettre considérée :

$$x^3 - 2x^2 + x - 1 \qquad a^3 - 2a^2b + a - 3$$

sont deux polynomes complets en x et a respectivement. Par contre $x^6 - 3x^3 + 2x - 1$ est un polynome incomplet.

83. Somme algébrique des polynomes. — Un polynome étant une somme algébrique de monomes, c'est-à-dire en définitive de nombres positifs ou négatifs, il suffit pour faire la somme algébrique de plusieurs polynomes ou monomes d'appliquer les règles déjà données pour la somme algébrique des nombres positifs ou négatifs (**69**). Par suite, *on ajoute un polynome à un autre polynome en recopiant tous ses termes avec leurs signes ; on le retranche en le recopiant après avoir changé tous les signes :*

$$(2a^2b - xy^2 + 3) - (7x^2 + abc^2 - y^2) + (3y^2) - (-7y) + (4x - 3)$$
$$= 2a^2b - xy^2 + 3 - 7x^2 - abc^2 + y^3 + 3y^2 + 7y + 4x - 3.$$

La somme de plusieurs polynomes et monomes est donc en général un polynome, Il peut y avoir cependant des réductions de termes semblables, et la somme peut se réduire à un monome, comme dans le cas suivant :

$$(3x^3-4x^2+7x-3)-(3x^2+9x+6)+(-3x^3+2x+9)$$
$$=3x^3-4x^2+7x-3-3x^2-9x-6-3x^3+2x+9$$
$$=3x^3-3x^3-4x^2-3x^2+7x-9x+2x-3-6+9=-7x^2.$$

Le plus souvent les polynomes que l'on ajoute sont ordonnés par rapport aux puissances décroissantes ou croissantes d'une même lettre comme dans l'exemple ci-dessus. On dispose alors l'addition comme en arithmétique, les diverses puissances de x étant les unes au-dessous des autres ; tout polynome à retrancher est recopié après changement de tous les signes ; le dernier exemple donne ainsi l'opération suivante :

$$\begin{array}{rrrr} 3x^3 & -\ 4x^2 & +\ 7x & -\ 3 \\ & -\ 3x^2 & -\ 9x & -\ 6 \\ -\ 3x^3 & & +\ 2x & +\ 9 \\ \hline & -\ 7x^2 & & \end{array}$$

84. Multiplication des polynomes. — Le produit de deux ou plusieurs polynomes ou monomes est évidemment une expression algébrique entière : le produit de $x-a$ par ax^2+bx+c s'écrit $(x-a)(ax^2+bx+c)$. Nous allons voir que, dans une telle opération, on peut faire disparaître les parenthèses et se ramener à un seul polynome.

Examinons d'abord le cas particulièrement simple où les polynomes sont réduits chacun à un terme. On voit immédiatement que *le produit de deux ou plusieurs monomes est un nouveau monome dont le signe extérieur, le coefficient numérique et les exposants des lettres qui entrent s'obtiennent d'après les règles déjà données* (**72**). Le produit des trois monomes $-\frac{2}{5}xy^2$; $15xy^3z$; $-\frac{1}{2}x^5z^2$ est :

$$\left(-\frac{2}{5}\right).15.\left(-\frac{1}{2}\right).xy^2.xy^3z.x^5z^2=3x^7y^5z^3.$$

On voit que *le degré du produit est la somme des degrés des facteurs*.

Considérons maintenant le cas où l'on multiplie un polynôme par un monome. Il suffit d'appliquer les règles concernant la multiplication d'une somme algébrique par un nombre (**72**) : *on multiplie successivement chacun des termes du polynome par le monome considéré, en tenant compte de la règle des signes*. Le produit est donc un polynome ayant autant de termes que le premier :

$$(4x^3-5x^2+3x-2)(-2x^2)=(4x^3)(-2x^2)+(-5x^2)(-2x^2)$$
$$+(3x)(-2x^2)+(-2)(-2x^2)=-8x^5+10x^4-6x^3+4x^2.$$

On peut disposer l'opération comme il suit :

$$\begin{array}{r} 4x^3 - 5x^2 + 3x - 2 \\ -2x^2 \\ \hline -8x^5 + 10x^4 - 6x^3 + 4x^2 \end{array}$$

On voit sur cet exemple que, si le polynome donné est ordonné, il en est de même du résultat, et enfin que *le degré du produit est la somme des degrés des deux facteurs*.

85. — Passons maintenant au cas général. Il suffira de savoir calculer le produit de deux polynomes pour pouvoir effectuer de proche en proche le produit d'un nombre quelconque de polynomes.

On effectue le produit de deux polynomes comme le produit de deux sommes algébriques (**72**) : *on multiplie le premier polynome successivement par les divers termes du second, et l'on effectue la somme algébrique des produits partiels ainsi obtenus :*

$$(a^2-xy)(x^2-ab)=(a^2-xy)(x^2)+(a^2-xy)(-ab)$$
$$=a^2x^2-x^3y-a^3b+xyab.$$

Ordinairement on considère des polynomes ordonnés et l'on dispose alors l'opération comme en arithmétique, chaque produit partiel occupant une ligne distincte et les mêmes puissances de x étant toujours les unes au-dessous des autres. On a effectué

ci-dessous la multiplication de $3x^3 - 4x^2 + 7x - 1$ par $-3x^2 - 2x + 7$:

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & & 3x^3 & -4x^2 & +7x & -1 \\
 & & & -3x^2 & -2x & +7 \\
\hline
-9x^5 & +12x^4 & -21x^3 & +3x^2 & & \\
 & -6x^4 & +8x^3 & -14x^2 & +2x & \\
 & & 21x^3 & -28x^2 & +49x & -7 \\
\hline
-9x^5 & +6x^4 & +8x^3 & -39x^2 & +51x & -7
\end{array}
$$

Si les deux polynomes ne sont pas complets, il faut en tenir compte pour que les puissances de x soient bien néanmoins à leur place, de façon à ce que dans tous les cas la réduction des termes semblables se fasse immédiatement au produit :

$$
\begin{array}{rrrrrrrrr}
 & & 7x^5 & & & & & -3x & +1 \\
 & & & & 4x^3 & -x^2 & & & +1 \\
\hline
28x^8 & & & -12x^4 & +4x^3 & & & & \\
 & -7x^7 & & & +3x^3 & -x^2 & & & \\
 & & 7x^5 & & & & & -3x & +1 \\
\hline
28x^8 & -7x^7 & +7x^5 & -12x^4 & +7x^3 & -x^2 & & -3x & +1
\end{array}
$$

Il y a quelques remarques immédiates que l'on peut faire sur ces opérations : *le produit des termes de plus fort degré en x dans les deux polynomes donne, sans aucune réduction, le terme de plus fort degré du produit*; il en est de même pour les termes de plus bas degré. On en déduit que le produit de deux polynomes a au moins deux termes et n'est donc pas un monome, et de plus que, ici encore, *le degré du produit de deux polynomes est la somme des degrés des deux facteurs.*

86. — Les règles qui précèdent permettent, comme nous l'avons déjà dit, d'écrire dans tous les cas une expression entière sous la forme d'un polynome :

$$
\begin{aligned}
(a+b)^2 + (a-b)^2 &= (a+b)(a+b) + (a-b)(a-b) \\
&= (a^2 + 2ab + b^2) + (a^2 - 2ab + b^2) \\
&= 2a^2 + 2b^2
\end{aligned}
$$

ou encore :

$$(a+b)^2-(a-b)^2=(a^2+2ab+b^2)-(a^2-2ab+b^2)$$
$$=4ab$$

De telles égalités sont des identités et l'on peut remplacer les signes $=$ par $\equiv$.

Certaines identités, particulièrement simples, sont fréquemment utilisées en Algèbre pour simplifier les calculs. Nous avons déjà donné les trois suivantes, sur l'importance desquelles nous ne saurions trop insister (**9, 73**) :

$$(a+b)^2 \equiv a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2 \equiv a^2-2ab+b^2$$
$$(a+b)(a-b) \equiv a^2-b^2.$$

En voici quelques autres, qui ne sont pas employées aussi souvent, mais qu'il est néanmoins bon de connaître :

$$(a+b)^3 \equiv a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a-b)^3 \equiv a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$
$$(a+b)(a^2-ab+b^2) \equiv a^3+b^3$$
$$(a-b)(a^2+ab+b^2) \equiv a^3-b^3$$
$$(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3) \equiv a^4-b^4$$

ou, plus généralement, m étant un entier quelconque :

$$(a-b)(a^m+a^{m-1}b+a^{m-2}b^2+\ldots\ldots+b^m) \equiv a^{m+1}-b^{m+1}.$$

Enfin citons l'identité de Lagrange, facile à vérifier :

$$(a^2+b^2)(\alpha^2+\beta^2)=(a\alpha+b\beta)^2+(a\beta-b\alpha)^2.$$

87. Division des polynomes. — Le quotient de deux polynomes est en général une expression fractionnaire : le quotient de $(x-a)$ par $(x-b)$ est $\frac{x-a}{x-b}$. Mais il y a des cas où une telle expression est entière : le quotient de $x-a$ par $x-a$ est 1.

Examinons d'abord le cas de deux monomes, par exemple

$\frac{2}{5}a^4b^3c$ et $\frac{1}{10}a^2b$. Le quotient peut s'écrire : $\dfrac{\frac{2}{5}a^4b^3c}{\frac{1}{10}a^2b}$. On ne change pas la valeur numérique du quotient en divisant (**38**) les deux termes par a^2, et cela quelle que soit la valeur numérique de a, pourvu qu'elle ne soit pas nulle. De même, on peut diviser, haut et bas, par b, et enfin effectuer la division de $\frac{2}{5}$ par $\frac{1}{10}$, ce qui donne 4, et l'on trouve ainsi pour quotient le monome entier $4a^2b^2c$. Nous laissons au lecteur le soin de démontrer que, de façon générale, *le quotient de deux monomes entiers n'est lui-même un monome entier que si chacune des lettres qui entrent dans le second monome se retrouve dans le premier, avec un exposant au moins égal* (**90**).

On en déduit que *le quotient d'un polynome quelconque par un monome ne peut être un polynome que si tous les termes sont divisibles séparément par ce monome.* Le quotient de $3a^3bc^2 - \frac{4}{5}a^2bc^3 + a^5b^2c^2d^4 + a^2bc$ par a^2bc est :

$$\frac{3a^3bc^2 - \frac{4}{5}a^3bc^3 + a^5b^2c^2d^4 + a^2bc}{a^2bc} = \frac{3a^3bc^2}{a^2bc} - \frac{\frac{4}{5}a^2bc^3}{a^2bc} + \frac{a^5b^2c^2d^4}{a^2bc} + \frac{a^2bc}{a^2bc}$$
$$= 3ac - \frac{4}{5}c^2 + a^3bcd^4 + 1.$$

Remarquons que, par suite, le polynome donné pouvait s'écrire : $a^2bc(3ac - \frac{4}{5}c^2 + a^3bcd^4 + 1)$. Effectuer un tel calcul s'appelle *mettre en facteur commun* le terme a^2bc. On aurait pu mettre en facteur également a^2 ; b ; bc ; abc ; ... ou même $3abc$; $\frac{2}{3}ac$;... avec des facteurs numériques quelconques.

88. — Il est plus difficile, dans le cas général de deux polynomes quelconques, de trouver, quand il existe, le polynome-quotient. Nous allons, pour traiter ce cas, prendre comme exemple la division de $21x^5 + x^4 - 13x^3 - 10x^2 - 7x + 10$ par $7x^3 - 2x^2 + x - 5$.

Nous allons donc chercher, en admettant que cela soit possible, un polynome qui, multiplié par $7x^3 - 2x^2 + x - 5$, reproduise le dividende. Dans une telle multiplication, les termes de plus fort degré des deux facteurs donnent par leur produit le terme de plus fort degré du produit (**85**). Par suite, le terme de plus fort degré du quotient est le quotient de $21x^5$ par $7x^3$, soit $3x^2$. On peut disposer au fur et à mesure les calculs de façon analogue à ce qui se fait en arithmétique :

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
21x^5 & + x^4 & - 13x^3 & - 10x^2 & - 7x & + 10 & 7x^3 - 2x^2 + x - 5 \\
\cline{7-7}
21x^5 & - 6x^4 & + 3x^3 & - 15x^2 & & & 3x^2 + x - 2 \\
\cline{1-6}
 & 7x^4 & - 16x^3 & + 5x^2 & - 7x & + 10 & \\
 & 7x^4 & - 2x^3 & + x^2 & - 5x & & \\
\cline{2-6}
 & & - 14x^3 & + 4x^2 & - 2x & + 10 & \\
 & & - 14x^3 & + 4x^2 & - 2x & + 10 & \\
\cline{3-6}
 & & & 0 & & &
\end{array}
$$

Il est commode, pour bien comprendre ce qui suit, de considérer $21x^5 + x^4 - 13x^3 - 10x^2 - 7x + 10$ comme la somme algébrique des produits partiels de $7x^3 - 2x^2 + x - 5$ par les divers termes du quotient. L'un de ces termes étant ici connu : $3x^2$, le produit partiel correspondant peut se calculer, et l'on trouve : $21x^5 - 6x^4 + 3x^3 - 15x^2$, qui, retranché du dividende, donne le reste : $7x^4 - 16x^3 + 5x^2 - 7x + 10$. Ce nouveau polynome est donc la somme algébrique des autres produits partiels, c'est-à-dire des produits des divers termes inconnus du quotient par le diviseur. On peut par suite recommencer, pour cette seconde partie du quotient, le même raisonnement que pour le quotient entier, en divisant $7x^4$ par $7x^3$, ce qui donne le terme suivant du quotient : x. En continuant ainsi, on verra que l'opération se termine et donne pour quotient $3x^2 + x - 2$.

Dans la pratique, on dispose les calculs de façon un peu différente : pour faciliter la soustraction des produits partiels, on change de signe tous leurs termes avant de les écrire, ce qui

donne l'opération ci-dessous.

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
21x^5 & + x^4 & - 13x^3 & - 10x^2 & - 7x & + 10 & 7x^3 - 2x^2 + x - 5 \\
\cline{7-7}
-21x^5 & + 6x^4 & - 3x^3 & + 15x^2 & & & 3x^2 + x - 2 \\
\cline{1-4}
 & 7x^4 & - 16x^3 & + 5x^2 & - 7x & & \\
 & - 7x^4 & + 2x^3 & - x^2 & + 5x & & \\
\cline{2-6}
 & & - 14x^3 & + 4x^2 & - 2x & + 10 & \\
 & & 14x^3 & - 4x^2 & + 2x & - 10 & \\
\cline{3-6}
 & & & & 0 & & \\
\end{array}
$$

89. — Nous avons dit qu'une division n'est pas toujours possible. Essayons comme précédemment de diviser $7x^4 - 16x^3 + 5x^2 + 9x - 2$ par $7x^3 - 2x^2 + x - 5$:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
7x^4 & - 16x^3 & + 5x^2 & + 9x & - 2 & 7x^3 - 2x^2 + x - 5 \\
\cline{6-6}
- 7x^4 & + 2x^3 & - x^2 & + 5x & & x - 2 \\
\cline{1-5}
 & - 14x^3 & + 4x^2 & + 14x & & \\
 & 14x^3 & - 4x^2 & + 2x & - 10 & \\
\cline{2-5}
 & & & 16x & - 10 & \\
\end{array}
$$

On voit que l'opération peut se continuer tant que les restes partiels sont de degrés supérieurs ou égaux au degré du diviseur, mais elle s'arrête dès que l'un d'eux $16x - 10$ est de degré inférieur au diviseur. La division est impossible au sens précédent du mot. Tout ce que l'on peut dire, c'est que, si de $7x^4 - 16x^3 + 5x^2 + 9x - 2$, on retranche le produit du diviseur par $x - 2$, il reste $16x - 10$, ce que l'on peut écrire :

$$7x^4 - 16x^3 + 5x^2 + 9x - 2 \equiv (7x^3 - 2x^2 + x - 5)(x - 2) + (16x - 10).$$

On peut en déduire la définition suivante : *étant donnés deux polynomes* A *et* B, *on appelle quotient* Q *et reste* R *de la division de* A *par* B, *deux polynomes* Q *et* R *tels que l'on ait identiquement :* $A \equiv BQ + R$, *pourvu que le degré de* R *soit inférieur à celui du diviseur* B. On démontre d'ailleurs qu'il n'y a jamais qu'un polynome Q et un seul, un polynome R et un seul répondant à ces conditions.

Dans le cas particulier où R est nul, on retrouve la définition de la division comme opération inverse de la multiplication.

Le lecteur remarquera l'analogie de ces deux définitions de la division avec celles que l'on donne en arithmétique pour les nombres entiers (**10**).

90. Exposants négatifs. — Nous allons reprendre pour l'examiner en détail le cas où la division de deux monomes entiers ne conduit pas à un nouveau monome entier. Supposons d'abord qu'il n'y ait qu'une seule lettre, et cherchons à diviser a^m par a^n. Le quotient peut s'écrire $\frac{a^m}{a^n}$. Si m est supérieur à n, on peut diviser par a^n les deux termes et l'on trouve $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$. Par exemple : $\frac{a^9}{a^5} = a^{9-5} = a^4$.

Si m est inférieur à n, on pourra diviser par a^m les deux termes et l'on trouve : $\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$. Par exemple $\frac{a^2}{a^5} = \frac{1}{a^{5-2}} = \frac{1}{a^3}$. Pour avoir des notations générales, on admet que, dans tous les cas, $\frac{a^m}{a^n}$ pourrait se représenter par a^{m-n}, ce qui, lorsque m est inférieur à n, donne pour a un exposant négatif : $\frac{a^2}{a^5}$ sera représenté par a^{-3} qui est égal à $\frac{1}{a^3}$. Donc, *par définition, élever un nombre à une puissance négative* — p *revient à prendre l'inverse de* a^p :

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}.$$

On a toujours le droit de prendre arbitrairement une définition et d'introduire une notation nouvelle, mais il serait maladroit de le faire sans savoir si cette définition et cette notation sont commodes. Dans le cas présent, il y a des règles simples que suivent les exposants ordinaires, ou exposants positifs, telles que les règles exprimées par les égalités (**73**) :

$$a^p \,.\, a^q = a^{p+q}$$

$$(a^p)^q = a^{pq}$$

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}.$$

La nouvelle notation ne sera avantageuse que si ces règles peuvent encore s'appliquer, p et q étant indifféremment positifs ou négatifs. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier qu'il en est bien ainsi dans tous les cas, nous bornant à montrer par exemple que l'on a, avec deux exposants négatifs :

$$(a^{-p})^{-q} = a^{(-p)(-q)} = a^{pq}.$$

En effet :

$$(a^{-p})^{-q} = \left(\frac{1}{a^p}\right)^{-q} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^p}\right)^q} = \frac{1}{\frac{1}{(a^p)^q}} = \frac{1}{\frac{1}{a^{pq}}} = a^{pq}.$$

Un cas particulier de l'égalité $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ est celui où $m = n$. Le quotient est alors 1, et l'on est ainsi conduit à poser $1 = a^{m-m} = a^0$. C'est ce que l'on fait en disant : *tout nombre élevé à la puissance zéro est égal à un*. Ici encore, le lecteur pourra vérifier que cette notation est soumise aux mêmes règles de calcul que les exposants non nuls.

Cette introduction des exposants négatifs permet de simplifier l'écriture du quotient de deux monomes. Par exemple le quotient de $\frac{3}{4} ab^3c^2$ par $-\frac{2}{5} a^3bx^2y$ s'écrit :

$$\frac{\frac{3}{4} ab^3c^2}{-\frac{2}{5} a^3bx^2y} = -\frac{15}{8} \frac{b^2c^2}{a^2x^2y} = -\frac{15}{8} a^{-2}b^2c^2x^{-2}y^{-1}.$$

Mais il faut remarquer que, bien qu'il n'y ait pas de lettres au dénominateur, le quotient n'est pas pour cela un monome entier.

Exercices — Nos 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 398, 485.

CHAPITRE III

ÉQUATIONS ET PROBLÈMES DU PREMIER DEGRÉ

91. Equations. — Résoudre un problème, c'est trouver un ou plusieurs nombres demandés par l'énoncé. Tout problème peut se traduire en général par des égalités appelées *équations* dans lesquelles entrent les *données*, et les quantités à calculer que l'on appelle des *inconnues*. Si l'on cherche par exemple deux nombres connaissant leur somme 7,94 et leur différence 3,86, on a entre ces deux nombres que nous désignerons par x et y les équations :

$$x + y = 7{,}94$$
$$x - y = 3{,}86.$$

Choisir les inconnues et écrire de telles égalités c'est *mettre le problème en équation* ; trouver les valeurs numériques des inconnues, c'est *résoudre* les équations. Enfin, vérifier que les valeurs trouvées sont bien des solutions du problème proposé, ce qui n'a pas toujours lieu comme nous le verrons, c'est faire la *discussion du problème*.

Nous étudierons d'abord la résolution des équations en nous bornant à des cas simples.

Les équations peuvent se présenter sous des formes très variables : il peut n'y avoir qu'une seule inconnue x comme dans :

$$2x + a = \sqrt{b} \qquad \sqrt{x} + x = a \qquad x^5 = 32 \qquad 2^x = 32$$

a et b étant des nombres supposés connus. Il peut y avoir plusieurs inconnues x, y, z,.. et plusieurs équations pour un même problème :

$$\begin{cases} x+y=7{,}94 \\ x-y=3{,}86 \end{cases} \quad \begin{cases} xy^2 = b\sqrt{a} \\ \dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \end{cases} \quad \begin{cases} 2^x = 2^y \cdot 2^z \\ y = 2z \\ x+z=4 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-y^2=az \\ x=\sqrt{z}+b. \end{cases}$$

On dit, suivant les cas, que l'on a à résoudre un système de 1, 2, 3, 4,... équations à 1, 2, 3, 4,... inconnues.

Nous nous bornerons presque exclusivement aux équations dans lesquelles les inconnues entrent sous forme rationnelle. Elles sont dites *entières* quand les inconnues n'y entrent pas en dénominateur :

$$2x+a=\sqrt{b} \qquad x^5=32 \qquad \begin{cases} x+y=7{,}94 \\ x-y=3{,}86 \end{cases}$$

sont des équations entières, tandis que le système :

$$\begin{cases} xy^2 = b\sqrt{a} \\ \dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \end{cases}$$

est simplement *rationnel*.

En général, une équation ou un système d'équations n'est vérifié, comme nous le verrons, que pour un petit nombre de valeurs numériques données aux inconnues, valeurs qui forment un *système de solutions*. C'est ainsi que $x = 5{,}90$, $y = 2{,}04$ forment un système de solutions pour les équations :

$$\begin{cases} x+y=7{,}94 \\ x-y=3{,}86. \end{cases}$$

Cependant il arrive parfois qu'un système d'équations comprenant une ou plusieurs équations est *indéterminé*, l'une des inconnues pouvant y prendre une valeur numérique quelconque : $x = y$ est une équation vérifiée pour une valeur quelconque donnée à x, pourvu que l'on donne à y la même valeur. De même $(x-1)(x+1)=x^2-1$ est une équation indéterminée, puisque c'est une *identité* (**79**).

Il arrive aussi qu'un système d'équations est *impossible*, lorsqu'aucune valeur des inconnues ne peut le vérifier. Ceci a lieu pour le système :

$$\begin{cases} x + y = 7{,}94 \\ x + y = 7{,}95 \end{cases}$$

la somme de deux nombres ne pouvant avoir deux valeurs différentes. De même $x^2 = -1$ est une équation impossible, un carré étant toujours positif ou nul (**73**).

92. Transformation des équations. — On dit que *deux équations sont équivalentes lorsque toutes les solutions de l'une vérifient l'autre, et inversement.* C'est ainsi que $x - y = 0$ et $x = y$ sont deux équations équivalentes. On définit de façon analogue deux *systèmes équivalents.*

Pour résoudre une équation ou un système d'équations, on se ramène à l'aide de transformations convenables à une équation ou à un système équivalent dont les solutions soient évidentes. C'est ainsi que l'on transforme comme nous le verrons le système $x + y = 7{,}94$; $x - y = 3{,}96$ en $x = 5{,}90$; $y = 2{,}04$, système équivalent dont les solutions sont en évidence.

Nous allons étudier les principales transformations que l'on peut faire subir à une équation ou à un système d'équations.

Si l'on ajoute, ou si l'on retranche, aux deux membres d'une équation une même quantité, on obtient une seconde équation équivalente à la première. Prenons par exemple l'équation $2x + 5 = -7x - 4$. Pour toute valeur numérique donnée à x : $x = -1$, $x = 2$, .. les deux membres de cette équation deviennent suivant les cas des nombres égaux ou inégaux : pour $x = -1$, on a 3 et 3 ; pour $x = 2$, on a 9 et -18, etc... L'addition d'un même nombre, par exemple -5 ou $7x$, pour $x = -1$, ou 2,... donne dans le premier cas une égalité et dans le second une inégalité. L'équation nouvelle est donc bien équivalente à la première, puisqu'elle admet comme solution toute solution de la première, et que toute valeur de x ne vérifiant pas la première ne la vérifie pas non plus.

L'addition de -5, puis de $7x$, donne ici :

$$2x + 5 - 5 + 7x = -7x - 4 - 5 + 7x$$

ou encore $9x = -9$.

Cet règle permet en particulier de faire passer d'un membre dans l'autre un terme quelconque d'une équation. C'est ce que l'on a fait pour 5 et $-7x$. On voit que, *lorsqu'on fait passer un terme d'un membre dans l'autre, il faut avoir soin de changer son signe.*

Cette même remarque permet, ce qui est souvent utile, de grouper tous les termes dans un même nombre. L'équation :

$$-x^2 + 7x - 3 = -2x^2 + 9x - 4$$

peut s'écrire :

$$2x^2 - x^2 - 9x + 7x + 4 - 3 = 0$$

ou après réduction :

$$x^2 - 2x + 1 = 0.$$

Toute équation entière pourra être mise ainsi sous forme d'un polynome égalé à 0; on appelle alors *degré de l'équation* le degré de ce polynome ; l'équation précédente est du second degré.

93. — *Si l'on multiplie, ou si l'on divise, les deux membres d'une équation par un même nombre, on la remplace par une équation équivalente.* Nous verrons d'ailleurs qu'il y a une restriction très importante à faire à cet énoncé.

Prenons l'équation $9x = -9$. L'égalité numérique qu'elle représente pour une valeur de x convenablement choisie est encore vérifiée si l'on multiplie ou si l'on divise les deux membres par un nombre quelconque. Divisons-les par 9 : $x = -\frac{9}{9}$ ou $x = -1$.

Cette règle permet de *chasser les dénominateurs* lorsqu'il y a des coefficients fractionnaires : l'équation

$$\frac{2x}{3} - \frac{7}{4} = \frac{x}{12} - \frac{5}{6}$$

devient après multiplication des deux termes par 12 :

$$8x - 21 = x - 10.$$

Ceci permet encore de rendre entière une équation qui contient des fractions rationnelles. Prenons l'équation

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-3} = 0$$

multiplions les deux termes par $(x-1)(x-3)$:

$$(x-3) + (x-1) = 0$$

ou

$$2x - 4 = 0.$$

Si l'on ne prend aucune précaution pour les faire, ces calculs ne sont pas toujours légitimes.

Prenons en effet l'équation donnée sous la forme abrégée $A = 0$ et supposons que l'on multiplie les deux termes par une certaine quantité B ; l'équation devient $AB = 0$. Il est bien évident que, si pour certaines valeurs données aux inconnues l'équation $A = 0$ est vérifiée, il en est de même de l'équation $AB = 0$, un des termes étant nul ; mais si, réciproquement, AB est nul, cela ne veut pas dire que A le soit : il peut arriver que ce soit B. Le théorème suppose donc essentiellement que B soit différent de zéro, tout au moins pour les valeurs numériques des inconnues que l'on obtient comme solutions de $A = 0$. C'est ainsi que les équations $x = 1$ et $x^2 = x$ ne sont pas équivalentes, la seconde étant vérifiée pour $x = 0$ qui ne vérifie pas la première.

Il ne faut pas non plus que B ait un dénominateur qui puisse devenir nul pour les valeurs considérées des inconnues, car on ne peut pas définir la valeur correspondante de B. On dit alors que B devient *infiniment grand* (**147**).

Prenons par exemple l'équation $x - 1 = 0$ dont la solution est $x = 1$, multiplions les deux termes par $\frac{x-2}{x-1}$. On a : $(x-1)\frac{x-2}{x-1} = 0$ ou encore : $x - 2 = 0$ qui n'est plus vé-

rifié pour $x = 1$; cela tient à ce que, pour $x = 1$, le facteur par lequel on a multiplié les deux termes est infiniment grand.

En résumé, *on n'a le droit de multiplier les deux nombres d'une équation par un même facteur que si ce facteur ne devient ni nul ni infiniment grand pour les valeurs numériques que l'on donne aux inconnues.*

Dans la pratique, on néglige parfois cette restriction, mais alors on s'assure que les racines obtenues vérifient bien l'équation proposée.

Ces diverses remarques nous suffiront pour la résolution de l'équation du premier degré à une inconnue.

94. — *Si dans un système d'équations on modifie l'une d'elles en lui ajoutant membre à membre une ou plusieurs autres équations du système, on forme un nouveau système équivalent au premier.* Prenons d'abord pour simplifier les raisonnements un système ne comprenant que deux équations :

$$\begin{cases} x + y = 7{,}94 \\ x - y = 3{,}86. \end{cases}$$

Nous allons montrer qu'il est équivalent au système :

$$\begin{cases} x + y = 7{,}94 \\ (x - y) + (x + y) = 3{,}86 + 7{,}94 \end{cases}$$

ou si l'on veut :

$$\begin{cases} x + y = 7{,}94 \\ 2x = 11{,}80. \end{cases}$$

En effet, les valeurs de x et y qui vérifient le premier système transforment les deux équations en égalités numériques ; il en est par suite de même pour $(x - y) + (x + y) = 3{,}86 + 7{,}94$ puisque l'on a séparément $x - y = 3{,}86$ et $x + y = 7{,}94$. Inversement un système de solutions vérifiant $x + y = 7{,}94$ et $(x - y) + (x + y) = 3{,}86 + 7{,}94$ vérifie bien $x - y = 3{,}86$.

Plus généralement, prenons un système d'équations représentées de façon abrégée par :

$$A = 0 \qquad B = 0 \qquad C = 0 \qquad D = 0$$

et montrons qu'il est équivalent au système :

$$A = 0 \qquad B = 0 \qquad C = 0 \qquad pA + qB + mC + nD = 0$$

p, q, m, n étant des coefficients numériques, mais *n étant essentiellement différent de* 0. Cette dernière équation s'appelle une *combinaison linéaire* des quatre premières. Si l'un des nombres p, q, m est nul, la combinaison linéaire ne porte que sur 3 équations au lieu de 4. De même, si deux des coefficients sont nuls, elle ne porte que sur 2 équations.

Supposons pour plus de généralité que tous les coefficients p, q, m soient différents de zéro. Le système proposé est successivement équivalent à chacun des systèmes :

$$pA = 0 \qquad qB = 0 \qquad mC = 0 \qquad nD = 0$$

ou :

$$pA = 0 \qquad qB = 0 \qquad mC = 0 \qquad pA + qB + mC + nD = 0$$

ou enfin :

$$A = 0 \qquad B = 0 \qquad C = 0 \qquad pA + qB + mC + nD = 0$$

qui est bien le système auquel nous voulions arriver.

Nous laissons au lecteur le soin d'établir par des raisonnements analogues à ceux qui précèdent que : *si dans un système d'équations dont l'une d'elles est résolue par rapport à l'une des inconnues x, on remplace cette inconnue par sa valeur dans toutes les autres équations, on forme un système équivalent au premier*. Le système :

$$\begin{cases} x = 7{,}94 - y \\ x - y = 3{,}86 \end{cases}$$

pourra ainsi se remplacer par le système :

$$\begin{cases} x = 7{,}94 - y \\ 7{,}94 - y - y = 7{,}94 - 2y = 3{,}86. \end{cases}$$

Ces divers principes trouvent leur application dans la résolution des systèmes de deux équations à deux inconnues (**97**).

95. Equations irrationnelles. — Pour terminer ces généralités, nous ferons quelques remarques sur les transformations que l'on peut faire subir à certaines équations irrationnelles simples pour les rendre rationnelles. Nous supposerons qu'il s'agisse uniquement de racines carrées. Lorsqu'il n'y a qu'un seul radical il est commode de l'isoler, quand cela est possible, dans l'un des membres de l'équation, en se servant des règles déjà données pour la transformation des équations. Par exemple :

$$\frac{\sqrt{4x^2 + 2x - 1}}{2x + 1} - 1 = 0$$

s'écrira successivement :

$$\sqrt{4x^2 + 2x - 1} - (2x + 1) = 0$$
$$\sqrt{4x^2 + 2x - 1} = 2x + 1$$

pour toutes les valeurs de x n'annulant $2x + 1$, c'est-à-dire pour x différent de $-\frac{1}{2}$.

On arrive ainsi dans tous les cas à une équation que l'on peut écrire sous forme abrégée : $\sqrt{A} = B$. Il peut sembler maintenant légitime de se ramener à une équation rationnelle en élevant au carré les deux membres, ce qui donne $A = B^2$. Mais ce n'est pas toujours exact. Si, en effet, pour des valeurs convenables des inconnues, A et B ont la même valeur numérique, il en est évidemment de même de leurs carrés A et B^2, mais la réciproque n'est pas vraie. Si A et B^2 ont la même valeur numérique, cela veut dire simplement que leurs racines carrées : $\sqrt{A}$ et B sont égales en valeurs absolues (**73**) ; elles peuvent avoir soit le même signe, soit des signes différents. L'équation $A = B^2$ est ainsi vérifiée pour toutes les solutions de $\sqrt{A} = B$ et aussi de $-\sqrt{A} = B$.

Reprenons l'équation précédente :

$$\sqrt{4x^2 + 2x - 1} = 2x + 1.$$

Elevons au carré les deux membres, on trouve :

$$4x^2 + 2x - 1 = (2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$$

ou en simplifiant :

$$2x + 2 = 0$$

qui n'admet pas d'autres solutions que $x = -1$.

Or -1 n'est pas solution de l'équation proposée, car les deux membres sont respectivement égaux à 1 et -1 pour cette valeur de x. Au contraire l'équation $\sqrt{4x^2 + 1x - 1} = -(2x + 1)$ admet bien la solution $x = -1$.

En résumé, on voit qu'en élevant au carré les deux termes d'une équation on peut introduire des *solutions étrangères* ; une solution de l'équation rationnelle obtenue ne doit être conservée que si l'on a vérifié que c'est bien aussi une solution de l'équation proposée.

96. Equation du premier degré à une inconnue. — Une équation du premier degré à une inconnue peut toujours se ramener à la forme :

$$ax = b$$

a et b étant des nombres connus, ou des lettres représentant ces nombres. On peut en effet faire passer les termes d'un nombre dans l'autre et par suite grouper tous les termes contenant x sous la forme ax et tous les termes connus en un seul b.

Prenons par exemple l'équation :

$$\frac{2x}{3} - \frac{7}{4} = \frac{x}{12} - \frac{5}{6}.$$

Chassons les dénominateurs en multipliant tous les termes par 12 :

$$8x - 21 = x - 10.$$

Faisons passer tous les termes inconnus dans le premier membre et tous les termes connus dans le second :

$$8x - x = 21 - 10$$
$$7x = 11$$

qui est bien de la forme indiquée. On en déduit x en divisant par 7 les deux termes : $x = \frac{11}{7}$, ce qui montre que la valeur numérique cherchée est $\frac{11}{7} = 1{,}57...$

Plus généralement l'équation $ax = b$ donne de même $x = \frac{b}{a}$, sauf si a est nul ; mais alors il n'y a plus d'équation proprement dite. Dans tout autre cas $\frac{b}{a}$ est la valeur numérique cherchée. Elle est nulle si $b = 0$.

97. Equations du premier degré à plusieurs inconnues. — Toute équation du premier degré à deux inconnues x et y peut se mettre sous la forme :

$$ax + by = c$$

a, b, c désignant des coefficients numériques connus. Une telle équation ne permet pas de déterminer les inconnues x et y. C'est ainsi que, si dans l'équation :

$$2x + 3y = 5$$

on donne à x la valeur 3, on a :

$$6 + 3y = 5$$

ou

$$3y = 5 - 6 = -1$$

d'où $y = -\frac{1}{3}$. De même, à toute valeur numérique de x correspond une équation du premier degré en y et une valeur numérique de y.

Nous allons voir par contre que si l'on se donne un système de deux équations à deux inconnues, on en déduit en général

un système et un seul de solutions pour x et y. Prenons deux telles équations :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 5x + 2y = -4. \end{cases}$$

Pour résoudre un tel système, remplaçons la deuxième équation par une combinaison linéaire des deux équations données, de façon à annuler le coefficient de l'une des inconnues : y. Il suffit de multiplier la deuxième équation par $+3$, la première par -2 et de les ajouter, ce qui remplace le système donné par le système équivalent :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ -2(2x + 3y) + 3(5x + 2y) = -2(5) + 3(-4) \end{cases}$$

ou après réductions :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 11x = -22. \end{cases}$$

La deuxième équation est équivalente à $x = -\frac{22}{11} = -2$. Le système proposé peut donc être remplacé par :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x = -2. \end{cases}$$

Substituons à x dans la première équation sa valeur numérique ; on a successivement :

$$\begin{cases} -4 + 3y = 5 \\ x = -2 \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} y = 3 \\ x = -2 \end{cases}$$

système équivalent au premier et dont les solutions numériques sont en évidence.

98. — De façon plus générale, et pour pouvoir examiner en détail les divers cas qui peuvent se présenter, prenons deux équa-

tions dont les coefficients seront représentés par des lettres : a, b, c ; a', b', c' :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c'. \end{cases}$$

Si b n'est pas nul, on peut comme dans le cas précédent remplacer la dernière équation par la combinaison linéaire :

$$b'(ax + by) - b(a'x + b'y) = cb' - bc'$$

ou après réductions :

$$(ab' - ba')\, x = cb' - bc'$$

qui ne contient plus y.

Le cas particulier où $b = 0$ donne une première équation qui ne contient plus qu'une seule inconnue x et l'on est ramené à des calculs analogues à ceux qui suivent.

Dans le cas général, le coefficient $ab' - ba'$ de x est différent de 0 et l'on peut diviser par ce coefficient, ce qui remplace le système proposé par le système équivalent :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ x = \dfrac{cb' - bc'}{ab' - ba'}. \end{cases}$$

On pourrait calculer y de façon analogue, mais l'on peut se servir des calculs déjà faits et remplacer x par sa valeur dans la première équation qui devient alors :

$$a\left(\frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}\right) + by = c$$

équation ne contenant plus que y. Si on achève les calculs, on en tire y ; on a donc ramené le système proposé au système équivalent :

$$\begin{cases} y = \dfrac{ac' - ca'}{ab' - ba'} \\ x = \dfrac{cb' - bc'}{ab' - ba'} \end{cases}$$

qui donne les solutions cherchées.

Ce calcul suppose essentiellement que $ab' - ba'$ ne soit pas nul. Sinon le système proposé est équivalent à

$$\begin{cases} ax + by = c \\ cb' - bc' = 0. \end{cases}$$

Si $cb' - bc'$ est différent de 0, cette dernière équation n'est jamais vérifiée. Les deux équations primitives sont dites *incompatibles*. Il n'y a aucun système de valeurs de x et y vérifiant à la fois les deux équations du système qui est *impossible*. Si au contraire $cb' - bc'$ est nul, le système proposé équivaut à la seule équation $ax + by = c$. On a vu que, dans ce cas, on peut donner à x telle valeur que l'on voudra, y s'en déduisant. Le système proposé est dit *indéterminé* : il admet une infinité de solutions. Par exemple on verra que le système :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 6x + 9y = 20 \end{cases}$$

est impossible tandis que le système :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 6x + 3y = 15 \end{cases}$$

est indéterminé.

99. — Si l'on a un plus grand nombre d'équations et un plus grand nombre d'inconnues, on emploie des méthodes analogues à celle qui précède. Si l'on a trois équations à trois inconnues x, y, z, on remplace la seconde, puis la troisième par des combinaisons linéaires telles que l'une des inconnues z ait disparu dans les deux nouvelles équations ainsi formées ; ces deux équations ne contenant plus que deux inconnues x et y peuvent être résolues. En portant les valeurs numériques obtenues dans la première équation qui n'a pas changé, on en déduit la valeur de z.

En général, il faut avoir autant d'équations que d'inconnues pour qu'il y ait un système de solutions, système qui est alors unique le plus souvent. S'il y a plus d'équations que d'in-

connues, le système est habituellement impossible ; il est indéterminé s'il y a plus d'inconnues que d'équations. Il est, par exemple, bien évident que si l'on a trois équations et deux inconnues x et y, les valeurs numériques de ces inconnues qui forment les solutions des deux premières équations ne vérifieront pas en général la troisième.

100. — La méthode de résolution qui précède n'est pas la seule employée en pratique. Nous allons indiquer quelques autres procédés. Reprenons le système :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 5x + 2y = -4 \end{cases}$$

et résolvons la première équation, comme si x était une quantité connue :

$$x = \frac{3y - 5}{-2}$$

puis portons cette valeur de x dans la deuxième équation, qui devient :

$$5\left(\frac{3y-5}{-2}\right) + 2y = -4.$$

On a une équation ne contenant plus que y ; si on la résoud on en tire $y = 3$ qui porté dans la première équation donne $x = -2$. Cette méthode que le lecteur justifiera sans peine s'appelle *méthode de substitution.*

Parfois il est commode d'introduire une inconnue auxiliaire. Soit à résoudre le système :

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} \\ \alpha x + \beta y = \gamma. \end{cases}$$

Désignons par k la valeur commune des deux premiers rapports, si l'on y remplace x et y par les valeurs numériques cherchées. On a : $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = k$; ou

$$x = ak \qquad y = bk.$$

Portons ces valeurs de x et de y dans la seconde équation du système donné ; elle devient :

$$\alpha . ak + \beta . bk = \gamma.$$

Si $\alpha a + \beta b$ est différent de 0, on en tire $k = \frac{\gamma}{\alpha a + \beta b}$ et par suite :

$$x = ka = \frac{k\gamma}{\alpha a + \beta b} \qquad y = kb = \frac{k\gamma}{\alpha a + \beta b}.$$

On peut encore résoudre le système qui précède en formant de nouveaux rapports égaux aux premiers (**37**, **74**) :

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{\alpha x}{\alpha a} = \frac{\beta y}{\beta b} = \frac{\alpha x + \beta y}{\alpha a + \beta b}$$

ou, en tenant compte de la seconde équation :

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{\gamma}{\alpha a + \beta b}$$

d'où l'on déduit les valeurs de x et y.

101. Inégalités du premier degré. — Lorsqu'une relation entre des quantités connues et des inconnues contient des signes d'inégalités : $>$, $<$ (**75**), on l'appelle parfois une *inéquation* ou plus simplement une inégalité. Résoudre l'inégalité $x^7 > 2 - x$ c'est trouver tous les nombres x vérifiant cette relation. C'est ainsi que $x = 2$ est une solution, mais il n'en est pas de même de $x = 1$ ou $x = 0$.

Nous nous bornerons à considérer des inégalités du premier degré à une inconnue, en insistant sur quelques précautions particulières à prendre pour leur résolution.

Certaines propriétés sont identiques à celles qui concernent les équations et se démontrent de la même façon. C'est ainsi que *si l'on ajoute ou si l'on retranche aux deux membres d'une inégalité un même nombre, on la remplace par une inégalité équivalente*. On en déduit que, *lorsqu'on fait passer un terme d'un nombre dans l'autre, il faut avoir soin de changer son signe.*

D'après ceci l'inégalité :

$$-3x + 2 > 7x + 7$$

s'écrira :

$$-3x - 7x > -2 + 7 \qquad \text{ou} \qquad -10x > 5.$$

Une inégalité peut être modifiée si l'on multiplie ou divise ses deux termes par un même nombre. Nous avons vu en effet (**75**) que : *si l'on multiplie ou si l'on divise les deux termes d'une inégalité par un même nombre m, l'inégalité ne change pas de sens si ce nombre est positif, mais elle change de sens s'il est négatif.* Cette règle est très importante en pratique. Si nous l'appliquons à l'inégalité ci-dessus : $-10x > 5$, en divisant par -10, il faut changer le sens de l'inégalité :

$$x < -\frac{5}{10} \qquad \text{ou} \qquad x < -\frac{1}{2}$$

qui est la réponse cherchée. On verra aisément que $x > \frac{1}{2}$ satisfait à l'inégalité : $-3x + 2 < 7x + 7$ et $x = -\frac{1}{2}$ à l'égalité $-3x + 2 = 7x + 7$.

Les calculs à effectuer sur des inégalités sont parfois assez délicats à cause de la restriction qui précède. Prenons l'inégalité :

$$\frac{1}{-x+1} > 2.$$

Pour la rendre entière, il faut distinguer deux cas.

1° Supposons que $-x + 1$ soit positif, c'est-à-dire que x soit inférieur à 1, l'inégalité devient $1 > -2x + 2$, d'où $x > \frac{1}{2}$. En comparant cette condition à l'hypothèse faite, on voit que si l'on a $\frac{1}{2} < x < 1$, x est une solution.

2° Si l'on suppose maintenant que x soit supérieur à 1, on se ramène à l'inégalité $1 < -2x + 2$, ou $x < \frac{1}{2}$, condition

incompatible avec l'hypothèse. Les seules solutions sont données par $\frac{1}{2} < x < 1$.

Il y a de même des précautions à prendre dans la résolution des inéquations irrationnelles. Nous nous bornerons à énoncer la règle suivante : *on peut élever au carré les deux termes d'une inégalité $A > B$, si A et B sont positifs. S'ils sont tous deux négatifs, il faut changer le sens de l'inégalité.* Si A et B sont de signes contraires, l'inégalité est toujours vérifiée si A est positif et B négatif et ne l'est jamais si A est négatif et B positif.

102. Problèmes du premier degré. — Dans les problèmes les plus simples, il n'y a aucune difficulté relative au choix des inconnues. On prend habituellement comme inconnues une ou plusieurs des quantités que l'on demande de calculer; on les désigne par x, y, z,.. Pour *mettre le problème en équation*, il suffit d'écrire sous forme algébrique que l'on a les propriétés indiquées par l'énoncé. Il faut avoir soin de prendre un même système d'unités : système métrique, système C. G. S., etc., (**46**, **51**) pour exprimer toutes les grandeurs dont il s'agit.

Prenons l'énoncé suivant : un appartement comporte deux modes d'éclairage, le gaz et l'électricité. La dépense pour 100 heures étant de 20 francs dans le premier cas et de 90 francs dans le second, on demande pendant combien de temps on pourra employer chacun des deux modes d'éclairage, sachant que la dépense moyenne pendant les 100 heures doit être $0^f,50$ par heure.

On pourrait ici prendre deux inconnues x et y qui seraient les nombres d'heures demandés; on aurait deux équations exprimant, la première que la durée totale est 100 heures, la seconde que la dépense moyenne est de $0^f,50$ par heure. Mais il est plus simple de ne prendre qu'une inconnue x, qui sera l'un de ces deux nombres ; supposons que ce soit le nombre d'heures pendant lesquelles on emploie l'éclairage électrique ; l'éclairage au gaz servira donc pendant $100 - x$ heures. La dépense en électricité sera $x \,.\, 0,90$ et en gaz $(100 - x) \,.\, 0,20$. Ecrivons

que la dépense totale est de 50 francs :

$$0,90\,x + (100 - x)\,.\,0,20 = 50.$$

C'est l'équation du problème. Résolvons-la :

$$0,90\,x - 0,20\,x = 50 - 100\,.\,0,20$$

$$0,70\,x = 50 - 20 = 30$$

$$x = \frac{30}{0,7} = 42 \text{ heures } \frac{6}{7} = 42 \text{ heures } 51 \text{ minutes.}$$

La durée de l'éclairage électrique doit donc être de 43 heures environ, et celle de l'éclairage au gaz de 57 heures.

103. — La mise en équation est complètement analogue si l'on a plus d'une inconnue.

Soit l'énoncé : un cycliste va d'une ville à une autre en trois quarts d'heure; la route comprend 6 kilomètres de montée et $3^{km},5$ de descente, la pente étant la même dans les deux cas. Au retour il met 10 minutes de moins pour effectuer le même trajet. Quelle est sa vitesse en montée et en descente ?

Prenons comme unité de temps la minute et comme unité de longueur le kilomètre. Soient x le temps qu'emploie le cycliste pour parcourir un kilomètre en montée, et y le temps correspondant pour la descente. Les équations du problème sont ici :

$$\begin{cases} 6x + 3,5y = 45 \\ 3,5x + 6y = 35 \end{cases}$$

qui résolues donnent $x = 6^{m},21$; $y = 2^{m},21$. Le chemin parcouru en une heure serait en montée : $\frac{60}{6,21} = 9^{km},700$ et en descente $\frac{60}{2,21} = 27^{km},100$.

Le lecteur remarquera que si l'on avait pris comme inconnues les vitesses et non les temps employés pour parcourir un kilomètre, on aurait eu des équations d'apparence plus compliquées.

104. — Un grand nombre de problèmes d'arithmétique se traitent simplement par l'algèbre. Nous allons en donner quelques exemples.

Dans les problèmes de *partages proportionnels* on partage une certaine quantité S, de façon que les parts soient proportionnelles à certaines quantités connues a, b, c, ... Si l'on désigne par x, y, z,.. ces parts, on a pour les équations du problème

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \dots$$

$$x + y + z + \dots = \text{S}.$$

La résolution de ce système est immédiate (**100**) : on peut écrire :

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \dots = \frac{x + y + z + \dots}{a + b + c + \dots} = \frac{\text{S}}{a + b + c + \dots\dots}$$

d'où les solutions cherchées :

$$x = \frac{a \,.\, \text{S}}{a+b+c+\dots} \quad y = \frac{b \,.\, \text{S}}{a+b+c+\dots} \quad z = \frac{c \,.\, \text{S}}{a+b+c+\dots} \dots$$

L'application de ces formules au problème déjà traité en arithmétique (**45**) est immédiate.

Les problèmes de *mélanges* sont tous analogues aux suivants :

Mélangeons A litres d'un liquide de densité a (**49**) avec B litres d'un second liquide de densité b, ce qui donne C litres d'un mélange de densité c. Les relations existant entre ces quantités sont

$$\text{A} + \text{B} = \text{C}$$

qui exprime que le volume total est la somme des volumes des deux liquides mélangés, et

$$\text{A}a + \text{B}b = \text{C}c$$

qui exprime la même propriété pour les poids.

Si maintenant nous nous donnons quatre des six quantités A, B, C, a, b, c, nous pourrons déterminer les deux autres.

Par exemple, si l'on se donne A, B, a, b, on a immédiatement pour C et c :

$$C = A + B \text{ et } c = \frac{Aa + Bb}{C} = \frac{Aa + Bb}{A + B}.$$

Prenons encore le cas suivant qui est un peu plus compliqué : on se donne les densités a, b des deux liquides, la densité c du mélange et son volume total C : quelles quantités A et B faut-il prendre des deux premiers liquides ? A et B sont les deux inconnues du système :

$$A + B = C$$
$$Aa + Bb = Cc$$

système qui résolu donne :

$$A = \frac{C(c - b)}{a - b} \qquad B = \frac{C(a - c)}{a - b}.$$

C'est dans cette dernière catégorie que rentre le problème déjà examiné (**45**), comme le lecteur le verra aisément.

105. Discussion. — Lorsqu'on a les réponses numériques fournies par la résolution du problème, il reste à discuter, c'est-à-dire à s'assurer que ces réponses conviennent à l'énoncé. Il peut arriver, comme nous l'avons vu (**95**), qu'elles ne vérifient pas les équations d'où l'on est parti, elles sont alors à rejeter. Si même elles vérifient ces équations, elles ne sont pas toujours acceptables. Cherchons le nombre de pièces de 5 francs à employer pour obtenir un poids de $137^{gr},5$ (**50**). On trouve 5 pièces et demie, ce qui prouve que le problème posé est impossible. Reprenons de même le problème concernant les deux modes d'éclairage d'un appartement (**102**). Pour une dépense horaire de 1 franc, on trouve $x = 114$ heures environ, alors que la durée totale est de 100 heures ; cela tient à ce que la dépense horaire la plus élevée, correspondant à l'emploi de l'électricité, n'est que de $0^{fr},90$. Si l'on se donne une dépense

horaire de $0^{fr},10$, on trouvera $x = -14$ heures, ce qui n'a ici aucun sens.

Il arrive que des solutions en apparence inacceptables prennent une signification si l'on change légèrement l'énoncé. Ceci a lieu en particulier dans le cas des solutions négatives, lorsque le résultat doit être positif mais qu'il représente une grandeur susceptible d'être comptée dans deux sens opposés.

Supposons, par exemple, que l'on prenne un rouleau de fil de fer, de densité 7,7, le fil ayant 1^{mm^2} de section et 100^m de long. Cherchons de combien il faut le raccourcir pour obtenir un poids de 1 kilog. Le calcul donne — 30 mètres environ, ce que l'on interprète, comme le lecteur le verra aisément, en disant que le rouleau est trop court, et qu'il faut rajouter une longueur de 30 mètres du même fil à ce rouleau pour avoir un poids de 1 kilog. (1).

Exercices. — Nos 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 133, 134, 135, 136, 137, 138 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 352, 353, 403, 404, 479.

---

(1) Nous renvoyons le lecteur au Chap. VI (**143** et suivants) pour l'étude graphique de la fonction du premier degré $y = ax + b$, étude qui se rattache étroitement à celle des équations du premier degré, et qui en constitue un complément indispensable; il y verra également comment on peut résoudre graphiquement un système d'équations du premier degré à deux inconnues.

CHAPITRE IV

ÉQUATIONS ET PROBLÈMES DU SECOND DEGRÉ

106. Équations du second degré. — Les principes généraux de la transformation des équations (**92** et suivants) permettent toujours de grouper tous les termes dans un même membre. Si l'équation est du second degré par rapport à une inconnue x, on aura ainsi des termes en x^2, des termes en x et des termes indépendants. La forme générale d'une telle équation est par suite :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

a, b, c étant des coefficients numériques. Il y a des cas simples dans lesquels la résolution est immédiate.

Résoudre $x^2 - 4 = 0$, c'est trouver un nombre dont le carré soit égal à 4 ; il y a *deux solutions* : $x = 2$ et $x = -2$. D'ailleurs ce sont les seules, car l'équation peut s'écrire (**86**) : $(x - 2)(x + 2) = 0$. Un tel produit ne peut s'annuler que si l'un des deux facteurs est nul. De même $x^2 - 3 = 0$ admet deux solutions $x = \sqrt{3} = 1,732..$, et $x = -\sqrt{3} = -1,732...$

Prenons maintenant l'équation : $x^2 + 4 = 0$. On sait que (**73**) *le carré x^2 d'un nombre x est toujours positif*, *quel que soit x, différent de zéro*. On en conclut que $x^2 + 4$ ne s'annule jamais. Une telle équation n'a *pas de racines*.

Un cas intermédiaire entre les deux précédents est celui où l'on a l'équation : $x^2 = 0$. Elle admet *une racine unique* $x = 0$.

On dit parfois, comme nous le verrons, que c'est *une racine double.*

107. — Abordons maintenant le cas général, et considérons l'équation :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

dans laquelle a est supposé différent de zéro, sans quoi l'équation ne serait que du premier degré. Divisons par a les deux termes de façon à ramener le coefficient de x^2 à être 1.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Pour nous ramener à une forme analogue à celle des équations numériques déjà étudiées, considérons $x^2 + \frac{b}{a}x$ comme le commencement d'un certain carré, d'après l'identité classique (**86**) :

$$(x + \alpha)^2 = x^2 + 2\alpha x + \alpha^2$$

qui devient ici :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}.$$

On peut alors écrire l'équation donnée sous la forme équivalente :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

ou

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0.$$

Il y a ici divers cas à considérer suivant le signe de $b^2 - 4ac$.

1° : $b^2 - 4ac > 0$. Le premier membre de l'équation est la différence des carrés de $x + \frac{b}{2a}$ et $\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. On peut donc l'écrire (**86**) :

$$\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = 0.$$

Cette équation ne peut être vérifiée que si l'un des facteurs est nul ; on est ramené à deux équations du premier degré qui donnent *deux solutions :*

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ou en abrégé :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Le raisonnement montre en outre qu'il ne peut pas y avoir d'autres solutions.

2° : $b^2 - 4ac < 0$. On a une somme de deux termes : $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ toujours positif ou nul, et $-\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ qui est positif. Donc, quel que soit x, l'égalité ne sera jamais vérifiée. Il n'y a *pas de solution.*

3° : $b^2 - 4ac = 0$. Ce cas est intermédiaire entre les deux précédents. L'équation se réduit à $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$, qui donne *une seule solution* : $x = -\frac{b}{2a}$. On l'appelle *racine double* parce que, dans ce cas, l'équation se ramène à $\left(x + \frac{b}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a}\right) = 0$ et que chacune des équations du premier degré ainsi obtenues donne la même solution : $x = -\frac{b}{2a}$.

108. — En résumé, *si $b^2 - 4ac$ est positif, l'équation a deux racines :*

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si $b^2 - 4ac$ est nul, ces deux racines n'en donnent plus qu'une $x = \frac{b}{2a}$; si $b^2 - 4ac$ est négatif, il n'y a plus de racines.

Cette discussion montre l'importance du signe de $b^2 - 4ac$, expression que nous retrouverons fréquemment dans la suite.

Ces formules se simplifient légèrement dans deux cas particuliers : si l'équation du second degré est de la forme :

$$ax^2 + 2b'x + c = 0$$

avec $b = 2b'$, les racines, si elles existent, sont données par :

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}.$$

Si l'équation est de la forme : $x^2 + px + q = 0$, le coefficient de x^2 étant 1, on a :

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Enfin, on utilise parfois la remarque suivante : si a et c sont de signes contraires, leur produit ac est négatif, et $b^2 - 4ac$ est alors positif. Il y a donc toujours des racines dans ce cas.

109. — Appliquons ceci à la résolution de quelques équations. Prenons :

$$2x^2 - 9x + 8 = 0.$$

On a $b^2 - 4ac = 81 - 64 = 17$. Il y a deux racines qui sont :

$$x' = \frac{9 + \sqrt{17}}{4} = \frac{9 + 4,12..}{4} = 3,28.. \qquad x'' = \frac{9 - \sqrt{17}}{4} = 1,22..,$$

Au contraire si l'on prend : $2x^2 - 7x + 8$, on a $b^2 - 4ac = 49 - 64 = -15$. Il n'y a donc pas de solution.

Considérons maintenant l'équation :

$$(x + 1)^2 = (2x - 2)^2.$$

On pourrait effectuer les calculs tels qu'ils se présentent, mais il vaut mieux extraire directement les racines carrées des deux membres, ce qui donne, comme on le sait, deux cas distincts :

$$(x + 1) = (2x - 2) \qquad \text{et} \qquad (x + 1) = -(2x - 2).$$

La première équation donne $x = 3$ et la deuxième $x = \frac{1}{3}$.

Prenons encore l'équation :

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2} = 1$$

qui est *irrationnelle*. Elevons au carré les deux membres :

$$(x+1) + (x+2) - 2\sqrt{x+1}\sqrt{x+2} = 1$$

ou successivement en divisant par 2 :

$$x+1 = \sqrt{x+1} \,.\, \sqrt{x+2} = \sqrt{(x+1)(x+2)}$$

Elevons au carré une seconde fois :

$$(x+1)^2 = (x+1)(x+2).$$

Au lieu de développer les calculs, nous remarquerons que $(x+1)$ est visiblement en facteur dans les deux termes. On peut alors écrire l'équation :

$$(x+1)^2 - (x+1)(x+2) = 0$$

$$(x+1)[(x+1) - (x+2)] = 0$$

ou enfin

$$-(x+1) = 0.$$

Il ne reste qu'une seule racine $x = -1$. Mais on a élevé deux fois au carré, et -1 est peut-être une solution étrangère (**95**). Pour $x = -1$, on trouve $\sqrt{x+1} = 0$ et $\sqrt{x+2} = \sqrt{1} = 1$. Donc $x = -1$ ne convient pas. Par contre, on peut voir que c'est une racine de chacune des équations :

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2} = -1 \qquad -\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2} = -1$$

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} = 1 \qquad -\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} = 1$$

qui conduisent toutes à la même équation :

$$(x+1)^2 = (x+1)(x+2).$$

Il est absolument indispensable, lorsqu'on a effectué des élévations au carré, de s'assurer que les racines obtenues conviennent bien à l'équation proposée.

110. Relations entre les coefficients et les racines. — Entre les racines x', x'' d'une équation $ax^2 + bx + c = 0$, quand elles existent, il y a deux relations très importantes à cause de leur simplicité. Pour les établir, reprenons les calculs déjà faits (**107**) dans le cas où $b^2 - 4ac$ est positif, et écrivons l'identité :

$$ax^2 + bx + c \equiv a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \equiv a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

$$\equiv a\left[x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right].\left[x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right]$$

Les quantités entre crochets sont $x - x'$ et $x - x''$, si l'on désigne par x' et x'' les deux racines. On a donc :

$$ax^2 + bx + c \equiv a(x - x')(x - x'')$$
$$\equiv ax^2 - ax(x' + x'') + ax'x''$$

ou en développant le second membre :

$$ax^2 + bx + c \equiv a[x^2 - x(x' + x'') + x'x'']$$

identité qui se réduit à :

$$bx + c \equiv - ax(x' + x'') + ax'x''$$

ce qui doit avoir lieu quel que soit x. En particulier pour $x = 0$:

$$c = ax'x''$$

et par suite :

$$b = - a(x' + x'').$$

En divisant par a, qui est différent de 0, on a les deux relations cherchées :

$$\begin{cases} x' + x'' = -\dfrac{b}{a} \\ x'x'' = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

On aurait pu d'ailleurs établir ces relations en calculant directement $x' + x''$ et $x'x''$.

Dans le cas où $b^2 - 4ac$ est nul, les relations sont encore vérifiées si l'on fait $x' = x''$, ce qui justifie à nouveau la dénomination de racine double appliquée à cette racine.

111. — Ces relations sont très remarquables parce qu'elles ne contiennent plus de radicaux, tandis que x' et x'' en contiennent. Elles s'énoncent ainsi : *la somme des racines d'une équation du second degré* $ax^2 + bx + c = 0$ *est* $-\frac{b}{a}$ *et leur produit est* $\frac{c}{a}$.

Les conséquences que l'on peut déduire de ces propriétés sont nombreuses et nous nous bornerons à en citer quelques-unes.

Deux racines d'une équation ne peuvent être égales et de signes contraires que si leur somme $-\frac{b}{a}$ est nulle, et par suite que si b est nul. L'équation est alors $ax^2 + c = 0$.

Une racine d'une équation ne peut être nulle que si le produit $\frac{c}{a}$ est nul et par suite que si c est nul. L'équation est alors $ax^2 + bx = 0$ de racines 0 et $-\frac{b}{a}$.

Si, dans une équation du second degré, on connaît déjà l'une des racines x', l'autre s'en déduit par la formule : $x'' = -\frac{b}{a} - x'$ ou encore : $x'' = \frac{c}{ax'}$.

Ces relations permettent également de connaître le signe des deux racines x' et x'', sans avoir besoin de les calculer. Leur produit étant $\frac{c}{a}$, elles sont de même signe si $\frac{c}{a}$ est positif; de signes différents dans le cas contraire (**72**). On sait d'ailleurs (**108**) que dans cette dernière hypothèse, ac étant négatif, les racines sont réelles.

Si $\frac{c}{a}$ est positif, le signe commun des deux racines est celui de leur somme $-\frac{b}{a}$; si $\frac{c}{a}$ est négatif, le signe de la somme est celui de la plus grande en valeur absolue des deux racines (**67**).

112. — Pour terminer ce qui concerne les applications de ces deux formules, nous allons montrer comment elles permettent de traiter deux problèmes que l'on rencontre parfois.

1° *Sachant que les racines x' et x'' satisfont à une relation $f(x', x'') = 0$, les calculer et donner la relation algébrique que doivent vérifier les coefficients a, b, c.*

2° *Etant donnée une équation du second degré, exprimer à l'aide des coefficients a, b, c, une fonction connue $f(x', x'')$ des deux racines.*

Sans traiter ces deux problèmes dans toute leur généralité, nous allons indiquer sur des exemples quelle est la marche à suivre. Supposons que l'on donne entre les racines x' et x'' d'une équation : $ax^2 + bx + c = 0$ la relation $x' = 2x''$. On peut alors calculer x' et x'' sans radicaux en se servant des relations :

$$x' = 2x'' \qquad x' + x'' = -\frac{b}{a} \qquad x'x'' = \frac{c}{a}.$$

Les deux premières sont des équations du premier degré à deux inconnues, d'où l'on tire : $x' = -\frac{2b}{3a}$; $x'' = -\frac{b}{3a}$. La relation $x' = 2x''$ n'ayant pas lieu en général, a, b, c doivent satisfaire à une certaine condition. On l'obtient ici en écrivant que x' et x'' ont pour produit $\frac{c}{a}$, ce qui donne $\frac{2b^2}{9a^2} = \frac{c}{a}$, ou $2b^2 = 9ac$.

Prenons maintenant le second problème en nous bornant au cas où $f(x', x'')$ est une *fonction symétrique* de x' et x'', c'est-à-dire telle que l'on puisse y échanger x' et x'' sans modifier sa forme. Calculons, par exemple, $\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''}$. On a :

$$\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} = \frac{x' + x''}{x'x''}.$$

Mais : $x' + x'' = -\frac{b}{a}$; $x'x'' = \frac{c}{a}$ et, par suite :

$$\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} = -\frac{b}{c}.$$

Si, de façon analogue, il fallait calculer : $(x' - x'')^2$, on aurait :

$$(x' - x'')^2 = x'^2 + x''^2 - 2x'x'' = (x' + x'')^2 - 4x'x''$$

et par suite :

$$(x' - x'')^2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 4\frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{a^2}.$$

Si $x' = x''$, on retrouve la condition : $b^2 - 4ac = 0$.

113. Trinome du second degré. — Une inégalité du second degré peut, en général, se ramener à l'une des deux formes

$$ax^2 + bx + c > 0 \qquad ax^2 + bx + c < 0.$$

Résoudre une telle inégalité revient à étudier, quand x varie, le signe de l'expression $ax^2 + bx + c$, que l'on appelle *trinome du second degré*. Il suffit pour cela de se reporter à une suite de transformations déjà données (**110**), ce qui permet d'écrire :

$$ax^2 + bx + c \equiv a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right].$$

Distinguons encore trois cas suivant le signe de $b^2 - 4ac$:

1° $b^2 - 4ac > 0$. Cette identité peut s'écrire (**110**) :

$$ax^2 + bx + c \equiv a(x - x')(x - x'')$$

x' et x'' étant les racines de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, ou, comme l'on dit, les *racines du trinome*. Le signe du trinome dépend alors de l'ordre de grandeur des trois quantités x, x', x''.

Si x est plus grand que les deux racines x' et x'', $x - x'$, et $x - x''$ sont positifs, et il en est de même de leur produit. Si x est inférieur à ces deux racines, les deux facteurs $x - x'$ et $x - x''$ sont négatifs ; leur produit est encore positif. Dans les deux cas, le trinome est du signe de a, ou si l'on veut, de son premier terme ax^2. Par contre, si x est compris entre les deux racines x', x'' un des deux facteurs $x - x'$, $x - x''$ et un seul est positif, leur produit est négatif et le trinome est du signe de $-a$, signe contraire à celui de son premier terme ax^2.

2° $b^2 - 4ac < 0$. Le trinome est le produit de a par une somme de deux termes : le premier $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ est toujours positif ou nul ; le second $\frac{4ac - b^2}{4a^2}$ est positif ; donc la somme est positive et le trinome est toujours du signe de a.

3° $b^2 - 4ac = 0$. On a alors :

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Le trinome est toujours du signe de a, sauf cependant pour la valeur de x : $-\frac{b}{2a}$ qui l'annule.

114. — En résumé, *si $b^2 - 4ac$ est positif, le trinome est du signe de a, quand x est, soit plus grand que les deux racines, soit plus petit ; du signe de — a quand x est entre les deux racines ; si $b^2 - 4ac$ est négatif, le trinome est toujours du signe de a ; si $b^2 - 4ac$ est nul, il est du signe de a* [1].

Soit par exemple à résoudre l'inégalité :

$$2x^2 - 7x + 6 > 0.$$

Il y a deux racines : $\frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{4}$ ou $x' = \frac{7 + 1}{4} = 2$ et $x'' = \frac{7 - 1}{4} = \frac{3}{2}$. Donc il faut avoir :

$$x > 2 \qquad \text{ou} \qquad x < \frac{3}{2}.$$

Tous les cas ne sont pas aussi simples que le précédent. Prenons l'inégalité :

$$\sqrt{2x^2 - 5x - 3} < x - 1.$$

Pour que la racine carrée ait un sens, il faut d'abord que le trinome $2x^2 - 5x - 3$ soit positif. Or, il a deux racines 3 et $-\frac{1}{2}$. On doit donc avoir $x \geqslant 3$ ou $x \leqslant -\frac{1}{2}$.

---

[1] Nous renvoyons le lecteur au chapitre VI (**159**) pour compléter ces notions par l'étude des variations du trinome du second degré et de la représentation graphique de cette variation.

Si, maintenant, on suppose $x < 1$, c'est-à-dire, en tenant compte des restrictions qui précèdent, $x \leqslant -\frac{1}{2}$, on voit que l'inégalité est impossible, le second membre étant négatif.

Si l'on suppose $x > 1$, c'est-à-dire, à cause des mêmes restrictions, $x \geqslant 3$, on peut alors élever au carré les deux termes de l'inégalité qui devient successivement :

$$2x^2 - 5x - 3 < (x - 1)^2$$
$$2x^2 - 5x - 3 < x^2 - 2x + 1$$
$$x^2 - 3x - 4 < 0.$$

Le trinome $x^2 - 3x - 4$ ayant comme racines 4 et -1, cette dernière inégalité suppose $-1 < x < 4$. Les solutions cherchées sont donc données par

$$3 \leqslant x < 4.$$

115. — Un problème analogue à celui qui précède consiste, étant donnés une équation du second degré : $ax^2 + bx + c = 0$ et un nombre α, à classer, par ordre de grandeur, α et les racines x', x'' de l'équation, sans que l'on ait besoin de résoudre cette équation.

Posons pour abréger :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

et convenons de désigner par $f(\alpha)$ la valeur numérique que prend le trinome quand on y remplace x par α. On a par hypothèse $f(x') = 0$ et $f(x'') = 0$.

Les résultats qui précèdent montrent que, si $b^2 - 4ac$ est positif, $f(\alpha)$ est du signe de $-a$, lorsque α est compris entre les racines, et du signe de a dans le cas contraire. Si $b^2 - 4ac$ est négatif, $f(\alpha)$ est toujours du signe de a. Si $b^2 - 4ac$ est nul, $f(\alpha)$ est du signe de α ou nul.

On en déduit inversement que :

1° *Si $f(\alpha)$ est du signe de a, il n'y a pas de racines, ou s'il y en a, α n'est pas compris entre les racines.* Le signe de

$b^2 - 4ac$ permet de savoir dans quel cas l'on se trouve. S'il y a deux racines, on peut se demander si α est plus grand que la plus grande ou plus petit que la plus petite. Il suffit de le comparer à un nombre quelconque compris entre les racines. En général, on le compare à $-\frac{b}{2a}$, demi-somme des racines, qui est comprise entre x' et x''. Si α est supérieur à cette demi-somme, il est aussi supérieur aux deux racines ; il est par contre inférieur aux deux s'il est inférieur à la demi-somme.

2° *Si $f(\alpha)$ est du signe de $-a$, les racines existent et α est compris entre elles.* Il est alors inutile de calculer $b^2 - 4ac$.

3° *Si $f(\alpha)$ est nul, α est une des racines.* L'autre est alors $-\frac{b}{a} - \alpha$ (**111**).

Si l'on a plusieurs nombres à classer, on procède de la même façon. En particulier, si deux des nombres α et β donnent des résultats de substitution $f(\alpha)$, $f(\beta)$ de signes contraires, on en déduit que l'un des résultats est du signe de $-a$, et que par suite le trinome a des racines.

Prenons l'équation : $-2x^2 + 12x - 17 = 0$ et cherchons à classer les entiers successifs par rapport aux racines, en supposant provisoirement qu'elles existent :

$$\ldots f(0) = -17 \qquad f(1) = -7 \qquad f(2) = -1$$
$$f(3) = 1 \qquad f(4) = -1 \qquad f(5) = -7 \ldots$$

On voit que tous les résultats de substitution ne sont pas du même signe, donc il y a deux racines et, d'après ce qui précède, on voit que 3 est entre les racines, que 0, 1, 2 sont inférieurs aux racines et que 4, 5 sont supérieurs. Les racines sont donc l'une entre 2 et 3, et l'autre entre 3 et 4. Leur calcul donne $\frac{6-\sqrt{2}}{2} = 2{,}292\ldots$ et $\frac{6+\sqrt{2}}{2} = 3{,}707\ldots$

116. Équations bicarrées. — On appelle *équation bicarrée* une équation du quatrième degré ne contenant pas de termes

en x de degré impair ; une telle équation peut toujours s'écrire

$$ax^4 + bx^2 + c = 0.$$

On peut ramener la résolution d'une équation bicarrée à celle d'équations du second degré. Posons $x^2 = y$, l'équation devient : $ay^2 + by + c = 0$. Les deux systèmes :

$$\begin{cases} ax^4 + bx^2 + c = 0 \\ x^2 = y \end{cases} \qquad \begin{cases} ay^2 + by + c = 0 \\ x^2 = y \end{cases}$$

étant équivalents, il suffit de résoudre le second. La première équation donne y, et la deuxième permet d'en déduire des valeurs correspondantes pour x. A chaque valeur positive de y : $y = k$ correspondent deux valeurs pour x : $\pm\sqrt{k}$. On en déduit que l'équation bicarrée

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

a 0,2 ou 4 racines suivant que l'équation $ay^2 + by + c = 0$ a 0,1 ou 2 racines positives.

C'est ainsi que l'équation :

$$2x^4 - 21x^2 + 50 = 0$$

a, par exemple, quatre racines acceptables :

$$x = \pm\sqrt{\frac{21 \pm \sqrt{41}}{4}} = \frac{\pm\sqrt{21 \pm \sqrt{41}}}{2}.$$

Le calcul des deux radicaux superposés est assez long, si l'on veut une approximation un peu grande au résultat. On peut se ramener à une somme algébrique de radicaux dans le cas particulier où $a.c$ (ici $2.50 = 100$) est carré parfait. Nous nous bornerons à le vérifier sur l'équation particulière considérée. On peut l'écrire successivement :

$$2x^4 + 50 - 21x^2 = 0$$
$$4x^4 + 100 - 42x^2 = 0.$$

Considérons les deux premiers termes comme le commence-

ment du carré de $2x^2 + 10$:

$$(2x^2 + 10)^2 - 40x^2 - 42x^2 = 0$$
$$(2x^2 + 10)^2 - 82x^2 = 0$$

différence de deux carrés que l'on peut écrire :

$$(2x^2 + 10 + \sqrt{82}\,x)(2x^2 + 10 - \sqrt{82}\,x) = 0.$$

On a à résoudre deux équations du second degré qui conduisent à quatre valeurs de x, que l'on peut grouper sous la forme abrégée :

$$x = \frac{\pm\sqrt{82} \pm \sqrt{2}}{4}.$$

Le calcul sous cette forme est plus rapide et donne les quatre valeurs :

$$x = \pm 2{,}617... \qquad x = \pm 1{,}910...$$

117. Systèmes d'équations du second degré. — Un système d'équations est dit du second degré si l'une au moins des équations qu'il comprend est du second degré *par rapport à l'ensemble des inconnues*, aucune de ces équations n'étant d'ailleurs d'un degré supérieur au second. C'est ainsi que les systèmes :

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ xy = 75 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ xy = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 3y = z \\ 3x + 2y = 5 + z \\ x^2 - y^2 + z^2 = 5 \end{cases}$$

sont du second degré.

Lorsqu'une seule des équations est du second degré, comme dans le premier et le dernier cas, on résout d'abord toutes les autres équations, de façon à en tirer, quand cela est possible, toutes les inconnues, y, z,... en fonction des données numériques et de l'une des inconnues x. On porte ces valeurs dans l'équation du second degré en x, y, z,... qui devient ainsi une équation du second degré en x. La résolution de cette équation donne la valeur numérique de x, d'où l'on déduit les valeurs

des autres inconnues. Il serait facile de justifier cette règle, que nous allons appliquer au dernier des trois systèmes ci-dessus.

Les deux premières équations donnent :

$$x = \frac{z + 15}{5} \qquad y = \frac{z - 10}{5}$$

valeurs qui, portées dans la dernière équation, permettent de l'écrire successivement :

$$\frac{(z + 15)^2}{25} - \frac{(z - 10)^2}{25} + z^2 = 5$$

$$(z^2 + 30z + 225) - (z^2 - 20z + 100) + 25z^2 = 125$$

$$25z^2 + 50z + 125 = 125$$

$$25z^2 + 50z = 0$$

dont les racines sont $z = 0$ et $z = -2$. On en déduit les deux systèmes de solutions :

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \\ z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{13}{5} = 2,6 \\ y = \frac{-12}{5} = -2,4 \\ z = -2. \end{cases}$$

118. — Dans la pratique, les équations contiennent souvent des *fonctions symétriques des inconnues* (**112**), telles que xy, $x + y$, $x^2 + y^2$. Nous allons indiquer sur quelques exemples comment on procède dans ce cas.

Un des plus simples parmi tous ces systèmes est le suivant :

$$\begin{cases} x + y = s \\ xy = p \end{cases}$$

s et p étant deux nombres donnés. La méthode qui précède donnerait en tirant y de la première équation et portant le résultat dans la seconde :

$$x(s - x) = p$$

ou

$$x^2 - sx + p = 0.$$

Mais il est plus rapide de remarquer que l'équation

$$X^2 - sX + p = 0$$

dans le cas où $s^2 - 4p$ est positif a deux racines X', X'' dont la somme est précisément s et le produit p. La première méthode de calcul prouve d'ailleurs qu'il ne peut pas y avoir d'autres solutions du premier système qui est donc vérifié soit par $x = X'$, $y = X''$, soit par $x = X''$, $y = X'$.

Pour résoudre le système

$$\begin{cases} x - y = d \\ xy = p \end{cases}$$

on se ramène au cas précédent en supposant que les inconnues sont x et $(-y)$:

$$\begin{cases} x + (-y) = d \\ x \cdot (-y) = -p \end{cases}$$

ce qui montre que x et $-y$ sont les deux racines de l'équation : $X^2 - dX - p = 0$, ce qui suppose que $d^2 + 4p$ est positif.

Prenons enfin le système :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ xy = p. \end{cases}$$

On cherche à calculer $x + y$ pour se ramener au premier cas. Il suffit ici de multiplier les deux termes de la seconde par 2 et de les ajouter à ceux de la première :

$$x^2 + y^2 + 2xy = (x + y)^2 = a^2 + 2p$$

ou

$$x + y = \pm\sqrt{a^2 + 2p}$$

si $a^2 + 2p$ est positif. On est alors ramené au système :

$$\begin{cases} x + y = \pm\sqrt{a^2 + 2p} \\ xy = p \end{cases}$$

que l'on sait résoudre.

Mais il est plus avantageux, pour éviter le calcul de deux radicaux superposés, de calculer $x - y$ comme on a calculé $x + y$:

$$x^2 + y^2 - 2xy = (x - y)^2 = a^2 - 2p$$

ou

$$x - y = \pm \sqrt{a^2 - 2p}$$

si $a^2 - 2p$ est positif. Ce double signe + ou — est indépendant du double signe obtenu pour $x + y$, de sorte que le système auquel on arrive :

$$\begin{cases} x + y = \pm \sqrt{a^2 + 2p} \\ x - y = \pm \sqrt{a^2 - 2p} \end{cases}$$

équivaut au fond à quatre systèmes distincts, suivant le choix adopté pour les signes + ou —. Chacun de ces systèmes donne immédiatement x en faisant la demi-somme des seconds membres et y en faisant leur demi-différence.

119. Problèmes du second degré. — Ici, comme dans le cas des problèmes du premier degré, il faut distinguer avec soin la mise en équation, la résolution et la discussion du problème. Cette discussion peut être assez compliquée si certaines des données sont représentées par des lettres dont la valeur numérique n'est pas donnée, et que l'on appelle parfois des *paramètres*. Nous nous bornerons à traiter avec quelques détails un seul exemple de problèmes du second degré.

Une usine placée en A à une distance AB $= 4^{\text{km}},5$ d'un canal OB (*fig.* 14) veut envoyer des marchandises dans une ville O située au bord de ce canal à une distance OB $= 20^{\text{km}}$ du point B. Pour cela, on établit une route rectiligne telle que AX, le transport s'effectuant au prix de $0^{\text{fr}},10$ la tonne par kilomètre de route AX et de $0^{\text{fr}},08$ par kilomètre de canal. On demande quel est le tracé à adopter pour cette route, si l'on veut que le

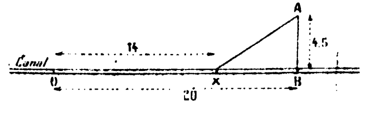


Fig. 14

prix total de transport de la tonne de A en O soit de p francs? En déduire la valeur minimum de p, et le tracé AX correspondant.

Pour mettre ce problème en équation, prenons comme inconnue la distance OX exprimée en kilomètres; distance que nous désignerons par x. La distance AX est alors donnée par le théorème de Pythagore (**251**); c'est :

$$\sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BX}^2} = \sqrt{4{,}5^2 + (20 - x)^2}.$$

Ce calcul suppose X compris entre O et B, mais le lecteur peut s'assurer que néanmoins la formule convient à tous les autres cas, quel que soit x.

L'équation du problème se déduit immédiatement de ce qui précède :

$$0{,}10 \sqrt{4{,}5^2 + (20 - x)^2} + 0{,}08\, x = p.$$

en supposant X à droite de O, c'est-à-dire x positif. Dans l'hypothèse contraire, $(-x)$ serait positif et l'on aurait :

$$0{,}1 \sqrt{4{,}5^2 + (20 - x)^2} + 0{,}08\, (-x) = p.$$

Nous laisserons de côté ce second cas évidemment peu intéressant en pratique. La traduction de l'énoncé conduit donc à l'équation :

$$0{,}1 \sqrt{20{,}25 + (20 - x)^2} + 0{,}08\, x = p$$

avec la condition :

$$x > 0.$$

120. — Pour résoudre l'équation qui précède, isolons le radical et élevons les deux termes au carré :

$$0{,}1 \sqrt{20{,}25 + (20 - x)^2} = p - 0{,}08 x$$
$$0{,}01\, (20{,}25 + 400 - 40 x + x^2) = (p - 0{,}08 x)^2$$
$$4{,}2025 - 0{,}4 x + 0{,}01 x^2 = p^2 - 0{,}16 p x + 0{,}0064 x^2$$

ou enfin en désignant par $f(x)$ le premier membre de l'équation obtenue :

$$f(x) \equiv 0{,}0036\,x^2 - 2x(0{,}2 - 0{,}08p) + 4{,}2025 - p^2 = 0.$$

Elle aura des racines, si l'on a :

$$(0{,}2 - 0{,}08p)^2 - 0{,}0036\,(4{,}2025 - p^2) > 0$$

ou

$$0{,}01\,p^2 - 0{,}032p + 0{,}024871 > 0.$$

Le trinome du second degré en p que l'on obtient ainsi a deux racines $p = 1{,}6 \pm \sqrt{2{,}56 - 2{,}4871} = 1{,}6 \pm \sqrt{0{,}0729} = 1{,}6 \pm 0{,}27$ soit $1{,}87$ et $1{,}33$. Ce trinome sera positif si l'on a :

$$p > 1{,}87$$

ou

$$p < 1{,}33.$$

Dans l'un ou l'autre cas $f(x)$ a deux racines x' et x''. Il faut savoir si ce sont bien des racines de l'équation donnée :

$$0{,}1\sqrt{20{,}25 + (20 - x)^2} = p - 0{,}08\,x$$

et non pas de l'équation :

$$0{,}1\sqrt{20{,}25 + (20 - x)^2} = -(p - 0{,}08\,x)$$

qui élevée au carré donnerait les mêmes résultats.

Il suffit, pour qu'un nombre x' ou x'', racine de $f(x) = 0$, convienne, qu'il rende $p - 0{,}08\,x$ positif, c'est-à-dire qu'il soit inférieur à $\frac{p}{0{,}08}$. Substituons ce nombre dans $f(x)$:

$$f\left(\frac{p}{0{,}08}\right) = 0{,}0036\,\frac{p^2}{0{,}08^2} - 2\,\frac{p}{0{,}08}\,(0{,}2 - 0{,}08p) + 4{,}2025 - p^2$$

$$= \frac{0{,}01\,p^2 - 0{,}032\,p + 0{,}026896}{0{,}08^2}.$$

Le numérateur n'a pas de racines, donc est toujours positif, c'est-à-dire du signe du coefficient de x^2 dans $f(x)$. Le nombre

$\frac{p}{0,08}$ n'est pas compris entre les racines. Pour qu'une valeur de x, x' ou x'' soit acceptable, il faut donc que $\frac{p}{0,08}$ soit plus grand que les deux racines. Écrivons qu'il est plus grand que la demi-somme :

$$\frac{p}{0,08} > \frac{0,2 - 0,08p}{0,0036}$$

inégalité qui résolue donne $p > 1,6$.

Nous avons vu, d'autre part, que p doit être soit plus grand que 1,87 soit plus petit que 1,33 ; comme il doit être supérieur à 1,6 la seule condition à garder est :

$$p > 1,87.$$

L'équation $f(x) = 0$ a alors deux racines x', x'' qui ne sont pas des solutions étrangères.

121. — Les calculs qui précèdent concernent uniquement la résolution de l'équation du second degré $f(x) = 0$, mais il y a en outre une condition : $x > 0$, dont nous n'avons pas encore tenu compte. Une racine, x' ou x'' ne sera acceptable que si elle est positive.

Le produit des racines est : $\frac{4,2025 - p^2}{0,0036}$. S'il est positif, c'est que l'on a :

$$p^2 < 4,2025$$

ou, p étant essentiellement positif :

$$p < 2,05$$

condition compatible avec celle qui est déjà imposée à p. Le signe commun aux deux racines est alors celui de la somme : $\frac{2(0,2 - 0,08p)}{0,0036}$, signe qui est le même que celui de $\frac{0,2}{0,08} - p$ ou $2,5 - p$; or p est ici inférieur à 2,05, donc les deux racines x' et x'' sont acceptables.

Si le produit des racines est négatif, c'est-à-dire si p est supérieur à 2,05, une des deux racines seule est acceptable.

Au point de vue pratique, le seul cas intéressant est celui où p est le plus petit possible ; on prendra donc ici la valeur minimum : $p = 1^{fr},87$, ce qui donne $x = 14^{km}$. C'est précisément le chemin qui a été représenté (*fig.* 14) en OXA. La longueur totale de la route est alors : $14 + 7,5 = 21^{km},5$. Le prix de transport kilométrique de la tonne est en moyenne : 0,087...

Exercices. — Nos 120, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 405, 416, 480, 481, 487.

CHAPITRE V

PROGRESSIONS ET LOGARITHMES

122. Progressions arithmétiques. — On appelle *progression arithmétique* une suite de nombres telle que la différence de deux termes consécutifs de cette suite ait une valeur constante appelée *raison* de la progression. C'est ainsi que la suite des nombres entiers :

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \ldots$$

est une progression arithmétique de raison 1 ; de même la suite des nombres impairs :

$$1 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 9 \quad 11 \quad 13 \quad 15 \quad 17 \quad 19 \ldots$$

est une progression de raison 2.

On vérifie aisément qu'un terme quelconque d'une progression arithmétique est la demi-somme, ou comme l'on dit, la *moyenne arithmétique* de celui qui le précède et de celui qui le suit.

Si la raison est positive, chaque terme est plus grand que celui qui précède ; la progression est dite *croissante*, sinon elle est *décroissante*.

Si l'on désigne par a le premier terme d'une progression, terme qui peut être positif ou négatif, et par r la raison qui peut aussi être d'un signe quelconque, le second terme est $a + r$; le troisième, $(a + r) + r$ ou $a + 2r$; le quatrième,

$(a+2r)+r$ ou $a+3r$. En continuant ainsi, on trouve pour termes successifs :

$$a \qquad a+r \qquad a+2r \qquad a+3r \qquad a+4r \ldots\ldots$$

Comme on le voit, *le terme de rang* n *est* $a+(n-1)r$. Par exemple le 300ème nombre entier est $1+(300-1).1 = 1+299 = 300$, résultat facile à prévoir. Le $n^{\text{ième}}$ nombre impair est $1+(n-1).2 = 2n-1$. Le 178ème terme de la progression :

$$-5, \quad -1, \quad 3, \quad 7, \quad 11, \quad 15, \quad 19, \quad 23, \quad 27 \quad . \quad .$$

est $-5+177.4 = -5+708 = 703$.

Si la raison r est positive, le terme de rang n croît indéfiniment avec n, si petit que soit r, car le produit $(n-1)r$ croît indéfiniment avec $n-1$. Cherchons par exemple quel est le premier terme supérieur à 1 000 dans la progression de raison 0,03 :

$$2 \qquad 2{,}03 \qquad 2{,}06 \qquad 2{,}09 \qquad 2{,}12 \qquad 2{,}15 \qquad 2{,}18 \quad . \quad . \quad .$$

Il faut avoir :

$$2+(n-1).0{,}03 > 1000$$

ou

$$(n-1).0{,}03 > 998$$
$$n-1 > 33\,266{,}66..$$

Il faudra donc prendre $n = 33\,268$. Le terme ayant ce rang est égal à $2+33{,}267.0{,}03 = 1\,000{,}01$.

Si l'on considère les termes consécutifs d'une progression arithmétique comme les abscisses de points d'une droite (*fig.* 15),

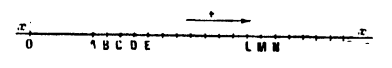


Fig. 15

l'origine étant en O, on trouve des points A, B, C, D, E, ... L, M, N, ... équidistants les uns des autres ; la distance de chacun d'eux au suivant est r. Si la raison est positive, le sens A, B, C, D, ... est le sens des abscisses positives.

123. — On a besoin, dans certains cas, comme nous le verrons plus loin (**130**), d'intercaler entre deux nombres donnés a et b un certain nombre n de termes, ou, comme l'on dit, d'*insérer n moyens*, de façon à former une progression arithmétique limitée dont les deux nombres donnés a et b soient les termes extrêmes ; b est alors au $n + 2^{ème}$ rang ; r étant la raison inconnue de la progression que l'on veut former, on a :

$$b = a + (n + 1)r.$$

On en déduit la valeur de r :

$$r = \frac{b - a}{n + 1}.$$

Si a et b sont eux-mêmes deux termes consécutifs d'une progression arithmétique, la nouvelle progression de raison r dont un des termes est a comprend tous les termes b, c,.. de la première progression, comme on le voit aisément. Par exemple, reprenons la progression :

2 2,03 2,06 2,09 2,12 2,15 2,18 ...

et insérons 4 moyens entre 2 et 2,03 ; 4 entre 2,03 et 2,06 ;.. on forme une nouvelle progression de raison $r = \frac{0,03}{5} = 0,006$. Ses termes sont :

2 2,006 2,012 2,018 2,024 2,03 2,036 .

On retrouve de 5 en 5 tous les termes de la première.

124. — Cherchons quelle est la somme des termes d'une progression arithmétique limitée comprenant n termes et de raison r :

$$a, b, c, d, \ldots i, j, k, l.$$

Nous allons établir d'abord que *la somme des termes équidistants des extrêmes est constante et égale à celle de ces extrêmes*, c'est-à-dire que :

$$a + l = b + k = c + j = d + i = \ldots..$$

En effet, le terme b qui suit a peut s'écrire $a+r$; le terme k qui précède l : $l-r$; leur somme donne $(a+r)+(l-r)$ $=a+l$. De même, c et j sont égaux respectivement à $a+2r$ et $l-2r$, de somme $a+l$. La démonstration s'étend à tous les termes pris deux à deux. Si le nombre total des termes est pair, il y a deux termes consécutifs au milieu dont la somme est $a+l$, mais si ce nombre est impair, le terme du milieu est égal à la demi-somme des extrêmes.

Pour déduire de cette propriété la somme des n nombres $a, b, c, .. k, l$, on les groupe deux à deux en disposant comme il suit le calcul de leur somme S :

$$S = a + b + c + \dots + j + k + l$$

et

$$S = l + k + j + \dots + c + b + a$$

d'où par addition :

$$2S = (a+l)+(b+k)+(c+j)+\dots+(j+c)+(k+b)+(l+a).$$

Chacune des sommes entre parenthèses est égale à $a+l$, et il y a n de ces parenthèses, donc : $2S = n(a+l)$, ce qui donne la valeur cherchée :

$$S = \frac{n(a+l)}{2}.$$

Il est bien évident que, si l'on prend un nombre n de termes de plus en plus grand, la somme S croît constamment, puisque $a+l$ et n croissent tous les deux.

La somme des n premiers entiers est :

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

C'est ainsi que la somme des 8 premiers nombres est 36. Ce résultat peut s'établir par le raisonnement suivant, qui n'est au fond qu'une traduction géométrique de celui qui précède. On peut représenter chacun des 8 premiers entiers par une rangée horizontale comprenant respectivement 1, 2, 3, ... 7, 8

carrés (*fig.* 16). Le nombre total des carrés est la somme cherchée. Doublons la somme considérée en juxtaposant à la première figure une figure analogue, mais renversée (*fig.* 17),

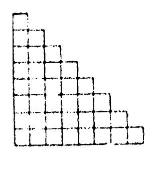


Fig. 16

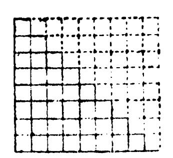


Fig. 17

représentée en pointillé. Le nombre total des carrés du rectangle ainsi formé est égal au produit : $(8 + 1) \cdot 8$. C'est le double de la somme S cherchée : $S = \frac{(8 + 1) \cdot 8}{2} = 36$.

Le lecteur verra sans peine que ce raisonnement permettrait d'établir la formule générale : $S = \frac{n(a + l)}{2}$.

La somme des n premiers nombres impairs est :

$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1) = \frac{n \cdot 2n}{2} = n^2.$$

C'est là un résultat assez remarquable, la somme des premiers nombres impairs donnant ainsi tous les carrés consécutifs :

$$1 = 1 \qquad 1 + 3 = 4 \qquad 1 + 3 + 5 = 9$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 \qquad 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 \quad \ldots.$$

125. Progressions géométriques. — On appelle *progression géométrique* une suite de termes telle que le rapport d'un terme quelconque au précédent ait une valeur constante appelée *raison* de la progression ; par exemple :

$$1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{16} \quad \frac{1}{32} \quad \frac{1}{64} \quad \ldots.$$

est une progression géométrique de raison $\frac{1}{2}$, puisque chaque terme s'obtient en multipliant le précédent par $\frac{1}{2}$. De même

$$1 \quad 10 \quad 100 \quad 1\,000 \quad 10\,000 \quad 100\,000 \quad \ldots.$$

est une progression de raison 10.

On établit aisément qu'un terme quelconque d'une progression géométrique est la racine carrée du produit des deux termes qui le comprennent ou, comme l'on dit, la *moyenne proportionnelle* ou *moyenne géométrique* de ces deux termes (**243**).

Dans le cas où la raison est positive, tous les termes sont de même signe ; nous nous bornerons à ce cas et nous supposerons en outre que les termes sont tous positifs.

La progression est dite *croissante* quand la raison est plus grande que 1, chaque terme étant alors plus grand que celui qui le précède. Elle est dite *décroissante* dans le cas contraire ; les deux progressions ci-dessus sont respectivement décroissante et croissante. Le cas où la raison est égale à 1 est peu intéressant, tous les termes étant égaux.

En désignant par a le premier terme d'une progression géométrique, par q la raison, le deuxième terme est égal à aq, le troisième à $aq \cdot q = aq^2$, le quatrième à aq^3, et *le terme de rang n est égal à aq^{n-1}*. Le 20ème terme de la progression :

$$1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{16} \quad \frac{1}{32} \quad \frac{1}{64} \quad \ldots\ldots$$

est $\left(\frac{1}{2}\right)^{19} = \frac{1}{2^{19}} = \frac{1}{524\,288} = 0{,}000\,001\,907 \ldots$ Le 45ème terme de la progression

$$1 \quad 10 \quad 100 \quad 1\,000 \quad 10\,000 \quad 100\,000 \quad \ldots\ldots$$

est :

$$10^{44} = 10000\,00000\,00000\,00000\,00000\,00000\,00000\,00000\,00000$$

Ces exemples montrent qu'en général les termes d'une progression géométrique décroissent ou croissent très rapidement, suivant que la raison est plus petite ou plus grande que 1. On démontre que dans le premier cas le terme de rang n tend vers 0, quand son rang croît de plus en plus, et que dans le second cas ce même terme croît indéfiniment avec n.

Cependant pour des progressions dont la raison est presque égale à 1, la croissance ou la décroissance est plus lente. C'est

ainsi que pour la progression dont le premier terme est 1 et la raison 1,001, le 100ème terme est seulement égal à 1,14.., le 1 000ème à 2,7.., etc. Le calcul de ces termes serait d'ailleurs assez pénible, mais nous verrons qu'on peut l'effectuer de façon rapide avec les logarithmes (**131**).

126. — Essayons ici, comme dans le cas des progressions arithmétiques, d'intercaler n termes entre deux nombres donnés a et b, ou, comme l'on dit, d'insérer n moyens, de façon à former une progression géométrique de $n+2$ termes dont a et b soient les deux extrêmes. Si q est la raison, le terme b qui est au $n+2$ème rang donne $b = a \cdot q^{n+1}$; on en déduit $q^{n+1} = \frac{b}{a}$. Il suffit donc d'extraire la racine $n+1$ème de $\frac{b}{a}$ (**34**). Bien que ces calculs se fassent toujours par logarithmes (**131**), on pourrait y arriver par des tâtonnements successifs. Cherchons par exemple à insérer 9 moyens entre 1 et 10. Il faut trouver pour r un nombre dont la puissance 10ème soit égale à $\frac{10}{1}$ ou 10. Ce nombre étant voisin de 1, essayons 1,1 ; 1,2 ;... :

$$1{,}1^{10} = 2{,}593.. \qquad 1{,}2^{10} = 6{,}192.. \qquad 1{,}3^{10} = 13{,}79..$$

Le nombre cherché étant compris entre 1,2 et 1,3 et paraissant un peu plus près de 1,3, essayons : 1,25 ; 1,26... :

$$1{,}25^{10} = 9{,}313.. \qquad 1{,}26^{10} = 10{,}09..$$

La raison r est 1,25 à 0,01 près ; à 0,001 près, on trouverait 1,259. Le lecteur vérifiera que, si l'on insère le même nombre de moyens entre les termes consécutifs d'une progression géométrique, on obtient encore une progression géométrique.

127. — Considérons une progression géométrique limitée de n termes :

$$a \qquad aq \qquad aq^2 \quad \ldots\ldots \quad aq^{n-1}$$

et cherchons la somme S de ses termes ; nous allons voir que :

$$S = a + aq + \ldots + aq^{n-1}.$$

Pour cela, remarquons que le produit de chaque terme par q donne précisément le terme suivant :

$$Sq = aq + aq^2 + aq^3 + \dots\dots + aq^n$$

Sq et S ayant en commun la presque totalité de tous leurs termes, leur différence se réduit à

$$Sq - S = aq^n - a = a(q^n - 1).$$

Les autres termes disparaissent. On en déduit :

$$S = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Cette démonstration revient au fond à appliquer l'identité connue (**86**) : $1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}$. En multipliant les deux membres par a, on retrouve la valeur de S.

Au point de vue pratique, il est très important de distinguer deux cas, suivant que la raison est plus grande ou plus petite que 1. Si elle est supérieure à 1, quand le nombre des termes croît indéfiniment, il en est de même de leur somme, puisque le dernier terme considéré aq^{n-1} croît avec le rang n. C'est ainsi que la somme des 10 premiers termes de la progression :

1 2 4 8 16 32 64 . . . .

est égale à $\frac{2^{11} - 1}{2 - 1} = 2^{11} - 1 = 2047$. La somme des 20 premiers termes est $2^{21} - 1 = 2\,097\,151$, nombre sensiblement 1000 fois plus grand que le précédent ; la somme des 30 premiers est $2^{31} - 1 = 2\,147\,483\,647$, qui est environ 1000 fois plus grand que le nombre qui précède, etc... La croissance serait beaucoup plus rapide pour la progression :

1 10 100 1 000 10 000 . . . .

La somme des 20 premiers termes est $\frac{10^{21} - 1}{10 - 1} = \frac{10^{21} - 1}{9} =$ 111 111 111 111 111 111 111, résultat que l'on peut écrire immédiatement, en effectuant l'addition indiquée.

Ces sommes croissent très vite ; cependant si la raison n'est supérieure à 1 que d'une très faible quantité, la somme croît de

façon plus lente. La somme des 100 premiers termes d'une progression de premier terme 0,05 et de raison 1,001 est :

$$0{,}05 \cdot \frac{1{,}001^{101} - 1}{1{,}001 - 1} = 50\,(1{,}105.. - 1) = 5{,}25..$$

128. — Nous allons arriver à des résultats complètement différents des précédents, dans le cas où la raison q est plus petite que 1. La formule donnant la somme peut alors s'écrire $S = a\,\frac{1 - q^n}{1 - q}$ en changeant les signes du numérateur et du dénominateur, de manière à les rendre positifs. Quand le nombre des termes augmente indéfiniment, q^n étant le seul terme variable dans la formule, écrivons-la :

$$S = a\left(\frac{1}{1 - q} - \frac{q^n}{1 - q}\right) = \frac{a}{1 - q} - \frac{a}{1 - q}\,q^n$$

$\frac{a}{1 - q}$ a une valeur fixe que l'on peut calculer. D'autre part q étant inférieur à l'unité, q^n tend vers 0, quand n augmente indéfiniment, propriété que nous admettrons ; il en est par suite de même de $\frac{a}{1 - q}\,q^n$. Donc S se rapproche de plus en plus de la valeur du terme fixe : $\frac{a}{1 - q}$; c'est la limite de la somme des termes quand leur nombre croît indéfiniment.

C'est ainsi que la somme des nombres :

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{16} \quad \cdots\cdots$$

tend vers : $\dfrac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$, résultat qui peut ici s'établir directement : si l'on ajoute $\frac{1}{4}$ à $\frac{1}{2}$, il ne manque plus que $\frac{1}{4}$ pour obtenir 1 ; si l'on ajoute la moitié de $\frac{1}{4}$, soit $\frac{1}{8}$, il ne manque plus que $\frac{1}{8}$; si l'on ajoute la moitié de $\frac{1}{8}$, soit $\frac{1}{16}$, il ne manque que $\frac{1}{16}$; en continuant ainsi, on voit, que plus on prend de termes, plus la somme obtenue est voisine de 1.

Prenons encore la progression illimitée :

$$\frac{9}{10} \quad \frac{9}{100} \quad \frac{9}{1\,000} \quad \cdots\cdots$$

elle a comme somme de ses termes : $\dfrac{\frac{9}{10}}{1-\frac{1}{10}} = 1$. En remarquant que les termes successifs de la progression sont 0,9 ; 0,09 ; ... on voit que l'on peut écrire : $1 = 0{,}999999\ldots$, le nombre des chiffres 9 étant supposé illimité dans le second membre. C'est une fraction périodique (**30**). Prenons plus généralement une fraction périodique quelconque $\frac{17}{7}$. Nous avons vu que $\frac{17}{7} = 2{,}428571\;428571\ldots\ldots$ Inversement, on peut écrire

$$2{,}428571\;428571\ldots = 2 + \frac{428\,571}{1\,000\,000} + \frac{428\,571}{1\,000\,000\,000\,000} + \ldots$$

progression de somme :

$$2 + \frac{\frac{428\,571}{1\,000\,000}}{1 - \frac{1}{1\,000\,000}} = 2 + \frac{428\,571}{999\,999}$$

ou après simplifications :

$$2 + \frac{3}{7} = \frac{17}{7}.$$

129. Logarithmes. — Considérons deux progressions, l'une géométrique, l'autre arithmétique, et faisons-les correspondre terme à terme :

$$\begin{array}{ccccccccc} \ldots\ \frac{1}{q^m} & \ldots\ \frac{1}{q^2} & \frac{1}{q} & 1 & q & q^2 & q^3 \ldots q^n \ldots \\ \ldots -mr & \ldots -2q & -r & 0 & r & 2r & 3r \ldots nr \ldots \end{array}$$

Comme on le voit, nous supposons que les deux progressions sont illimitées dans les deux sens et de plus, ce qui est essentiel, que la première contient le terme 1, et la seconde le terme 0, ces deux termes se correspondant.

On dit que *tout terme de la seconde progression est le loga-*

rithme du terme correspondant de la première. Les deux nombres supposés positifs qui servent à définir ces progressions étant q et r, le logarithme de q^n est donc nr; celui de $\frac{1}{q^m}$, ou si l'on veut (**90**) de q^{-m}, est $-mr$. Remarquons encore que tous les termes de la première progression sont positifs : *les nombres positifs seuls ont des logarithmes.*

Le seul système de logarithmes employé en pratique est le système défini par les deux progressions :

Nombres :	...	10^{-m}	...	10^{-2}	10^{-1}	1	10	100	...	10^n	...
Logarithmes :	...	$-m$	...	-2	-1	0	1	2	...	n	...

Il est dit *à base dix* ou *décimal*, parce que 10 est le nombre qui admet 1 pour logarithme. C'est ce système de logarithmes que nous considérerons désormais.

130. — Les logarithmes jouissent de propriétés tout à fait remarquables que nous exposerons un peu plus loin ; il y a par suite un grand intérêt à pouvoir définir le logarithme d'un nombre quelconque. Pour chercher le logarithme de 3, par exemple, insérons un même nombre de moyens entre deux termes consécutifs de chacune des progressions. On forme aussi deux nouvelles progressions admettant en particulier comme termes tous les termes des premiers et définissant un système de logarithmes plus complet que le système précédent et de même base ; chaque terme de la seconde progression est encore le logarithme du terme correspondant de la première. L'insertion de 9 moyens entre 1 et 10, de 9 moyens entre 10 et 100, pour la progression géométrique, et par suite de 9 moyens entre 0 et 1, de 9 moyens entre 1 et 2 pour la progression arithmétique, etc., donne ici (¹)

Nombres :	...	0,794	1	1,259	...	2,512	3,162	...	7,943	10
Logarithmes :	...	$-0,1$	0	0,1	...	0,4	0,5	...	0,9	1.

(¹) Ces calculs très pénibles par les méthodes directes ont été faits, une fois pour toutes, par des procédés que nous n'indiquerons pas, procédés qui ont permis de dresser les tables de logarithmes (**134**).

0,1 est le logarithme de 1,259 ; 0,2 de 1,585, etc.. Le nombre 3 est compris entre 2,512 et 3,162 de logarithmes respectifs 0,4 et 0,5. Insérons à nouveau 9 moyens entre deux termes consécutifs :

Nombres :	...	2,512	...	2,951	3,020	3,090	3,162
Logarithmes :	...	0,4	...	0,47	0,48	0,49	0,5

3 est compris entre 2,951 et 3,020 ... de logarithmes 0,47 et 0,48. En continuant ainsi de suite, on aura pour le logarithme de 3 autant de décimales que l'on voudra : log 3 = 0,477...

Cette démonstration peut être rendue rigoureuse et permet ainsi de définir le logarithme d'un nombre positif donné avec une approximation quelconque. On établit par des raisonnements analogues que tout nombre positif ou négatif peut être considéré comme le logarithme d'un nombre que l'on peut calculer.

Pour dresser une *table de logarithmes* (**134**), on insère une fois pour toutes, un nombre assez grand de moyens entre les termes des deux progressions pour que tous les nombres dont on peut avoir besoin se trouvent dans la table avec une approximation suffisante. Par exemple insérons 999 moyens entre deux termes consécutifs de chaque progression, on obtient deux listes de nombres dont voici un extrait :

Nombres :	...	1	1,003	...	10	...	48,19	48,31	48,42	...
Logarithmes :	...	0	0,001	...	1	...	1,683	1,684	1,685	...

Le logarithme d'un nombre quelconque est dans cette table avec 3 décimales exactes. Par exemple : log 48,365 = 1,684.

131. — Les logarithmes jouissent de propriétés remarquables que nous allons étudier. La plus importante de toutes est la suivante d'où découlent toutes les autres : *le logarithme du produit de deux facteurs est la somme des logarithmes de ces facteurs*, ce que l'on peut écrire, a et b étant essentiellement positifs :

$$\log (ab) = \log a + \log b.$$

Prenons, pour fixer les idées, comme table de logarithmes les deux progressions qui précèdent de raisons respectives $q = 1{,}003$ et $r = 0{,}001$ et supposons que a et b soient deux termes de la première, c'est-à-dire que $a = q^\alpha$, $b = q^\beta$, α et β étant des entiers positifs ou négatifs, suivant que a et b sont plus grands ou plus petits que 1. Les logarithmes correspondants de ces nombres sont, dans la seconde progression, αr et βr. Si l'on remarque que $ab = q^\alpha \cdot q^\beta = q^{\alpha+\beta}$ on voit que son logarithme est bien $(\alpha + \beta)\, r = \alpha r + \beta r$.

En général, a et b ne sont pas dans la liste des termes de la progression géométrique ; on n'y trouve que des valeurs approchées. Nous admettrons sans autre démonstration que la propriété est encore exacte dans ce cas.

On établira de même que

$$\log(abc \ldots k) = \log a + \log b \ldots + \log k.$$

En particulier si les p facteurs a, b, c, ... k sont égaux, on a l'égalité :

$$\log a^p = p \log a.$$

Le logarithme de la puissance $p^{\text{ième}}$ d'un nombre est égal à p fois le logarithme de ce nombre.

La propriété fondamentale des logarithmes conduit encore à l'énoncé suivant : *le logarithme du quotient de deux nombres est la différence des logarithmes des deux nombres.* Si, en effet c est le quotient de a par b l'égalité $a = bc$ donne, d'après ce qui précède, $\log a = \log b + \log c$, d'où l'on déduit :

$$\log c = \log a - \log b.$$

De même, si l'on désigne par b la racine $p^{\text{ième}}$ d'un nombre a, on a par définition $a = b^p$ et par suite $\log a = p \log b$ ou

$$\log b = \frac{\log a}{p}.$$

Donc : *le logarithme d'une racine $p^{\text{ième}}$ s'obtient en divisant par p le logarithme du nombre considéré.*

Ces propriétés montrent immédiatement quel est l'usage d'une table de logarithmes. Par exemple, pour calculer le produit de deux nombres, on additionnera leurs logarithmes lus dans la table, puis on cherchera quel est le nombre qui admet précisément ce total comme logarithme : c'est le produit cherché. C'est ainsi que l'*on remplace à l'aide des logarithmes la multiplication par une addition, la division par une soustraction, l'élévation aux puissances par une multiplication et l'extraction des racines par une division*. Les opérations sont comme on le voit considérablement abrégées.

132. Tables de logarithmes. — Nous ne parlerons pas de la façon effective dont on a construit les tables, mais uniquement de leur utilisation pratique.

Rappelons d'abord que seuls les nombres positifs ont des logarithmes.

Dans le système à base 10 que nous considérons, les logarithmes des nombres 1, 10, 100, 1 000, ... sont les entiers consécutifs 0, 1, 2, 3, ... On en conclut que tout nombre compris entre 1 et 10 a un logarithme dont la partie entière ou *caractéristique* est 0; tout nombre compris entre 10 et 100 a pour partie entière 1, etc... *La caractéristique du logarithme d'un nombre plus grand que 1 comprend autant d'unités qu'il y a de chiffres moins un dans la partie entière du nombre considéré :* $\log 274500 = 5,4385$; $\log 274,5 = 2,4385$; $\log 2,745 = 0,4385$. Ces exemples montrent en outre que *les parties décimales des logarithmes sont les mêmes pour des nombres qui ne diffèrent entre eux que par la place de la virgule*, ce qui se démontre immédiatement :

$$274500 = 274,5 \times 1\,000 = 2,745 \times 100\,000$$

d'où :

$$\log 274500 = \log 274,5 + \log 1\,000 = \log 2,745 + \log 100\,000$$

ou :

$$\log 274500 = 3 + \log 274,5 = 5 + \log 2,745.$$

La question est un peu plus complexe pour des nombres inférieurs à 1, car leurs logarithmes sont négatifs. Par exemple

$$\log 0{,}002745 = \log 2{,}745 - \log 1\,000 = 0{,}4385 - 3.$$

On pourrait effectuer la soustraction et prendre pour logarithme $-2{,}5615$, mais il est préférable de ne pas modifier la partie décimale et d'écrire ce logarithme sous la forme $\bar{3}{,}4385$. Grâce à cette notation, qui se trouve définie par ce qui précède, la partie décimale reste positive et la caractéristique change seule quand on déplace la virgule; *pour un nombre inférieur à l'unité, la caractéristique est négative et comprend autant d'unités qu'il y a de zéros avant le premier chiffre significatif* : $\log 2{,}745 = 0{,}4385$; $\log 0{,}002745 = \bar{3}{,}4385$.

133. — Dans le cas où un logarithme est précédé du signe —, ce qui arrive en particulier dans les divisions (**131**), on se ramène encore à un nombre dont la partie décimale soit positive. Prenons par exemple : $-\log 274{,}5 = -2{,}4385$. On peut l'écrire successivement :

$$\begin{aligned} -\log 274{,}5 &= -2{,}4385 = -2 - 0{,}4385 \\ &= -3 + (1 - 0{,}4385) = -3 + 0{,}5615 \\ &= \bar{3}{,}5615 \end{aligned}$$

avec la notation déjà employée $\bar{3}{,}5615$ s'appelle le *cologarithme* de $274{,}5$. La partie décimale $0{,}5615$ est dite *complémentaire à l'unité* de $0{,}4385$. De même :

$$\begin{aligned} -\log 0{,}002745 &= -\bar{3}{,}4385 = -(-3 + 0{,}4385) \\ &= 3 - 0{,}4385 = 2 + (1 - 0{,}4385) \\ &= 2{,}5615. \end{aligned}$$

La partie décimale du logarithme est toujours positive et ne dépend pas de la place de la virgule. La règle suivante s'applique à tous les cas : *pour écrire le cologarithme d'un nombre dont on a le logarithme on prend comme nouvelle partie décimale le complément à l'unité de l'ancienne et pour nouvelle caractéristique l'ancienne augmentée de* 1, *puis changée de signe.* En pra–

tique, on prend le complément à 1 de la partie décimale en retranchant tous les chiffres de 9, sauf le dernier que l'on retranche de 10.

On peut remarquer que la somme des parties décimales d'un logarithme et du cologarithme correspondant étant 1 la somme des caractéristiques est par suite égale à — 1.

134. — Les tables de logarithmes les plus employées donnent les logarithmes des nombres avec 4, 5 ou même parfois 7 décimales. Une notice détaillée indique pour chacune d'elles les particularités qu'elle peut présenter. Nous utiliserons ici la table sommaire qui se trouve à la fin du volume et qui donne les logarithmes avec 4 décimales. Son emploi est analogue à celui des tables plus complètes.

Soit à chercher le logarithme de 6,72. La caractéristique ne se trouve pas dans la table, mais nous savons qu'elle est égale à 0. On trouve dans la première colonne les deux premiers chiffres significatifs du nombre : 67 ; les colonnes portant en tête les chiffres 0, 1, 2, 3, ... 8, 9 contiennent respectivement sur la ligne 67 les logarithmes des nombres 670, 671, 672, 673, .., 678, 679. On a donc (¹) :

$$\log 6,72 = 0,8274.$$

Pour ne pas allonger la table, on n'a mis dans chaque colonne que les 3 derniers chiffres décimaux du logarithme, le premier : 8 ne se trouvant que dans la première colonne à la ligne 63.

Si l'on cherche les logarithmes des nombres 6,30 ; 6,31 ; 6,32 ;.. on verra qu'ils ne sont pas tous sur la même ligne, car la partie décimale du premier de ces logarithmes commence par un 7 : 0,7993, tandis que pour les autres elle commence par un 8 : 0,8000 ; 0,8007 ;..

Le plus souvent le nombre dont on cherche le logarithme ne

(¹) Le chiffre 4 est suivi d'un astérisque : 4* (**55**) pour indiquer qu'il est approché par excès : le nombre exact est compris entre 0,82735 et 0,8274.

se trouve pas dans la table. Prenons 63,6372 ... La table donne

$$\log 63{,}6 = 1{,}8035 \qquad \log 63{,}7 = 1{,}8041.$$

La différence 8041 — 8035 = 6 s'appelle *différence tabulaire*. Pour avoir une décimale de plus dans le calcul du logarithme, on suppose, ce qui est suffisamment exact en pratique, que entre les deux nombres 63,6 et 63,7 la variation du logarithme est régulière. On limite le nombre donné au chiffre significatif suivant : 63,64. Une augmentation de 0,10 sur le nombre entraînant une augmentation de 6 unités du dernier ordre sur le logarithme, une augmentation de 0,04 unités entraîne pour ce logarithme une augmentation de $\frac{4.6}{10} = 2{,}4$. On augmentera donc le logarithme de 2 unités du dernier ordre, ce qui donne : 3,8037.

Pour des différences tabulaires plus importantes, il est commode d'employer la table des « parties proportionnelles » que l'on trouvera avec le tableau des logarithmes. C'est ainsi que pour une différence tabulaire de 34 unités, au lieu de faire le produit de ce nombre par 0,4 on ajoute les nombres 15 et 2 qui se trouvent dans les colonnes marquées 30 et 4 et l'on ajoute au logarithme 15 + 2 = 17. Pour une différence de 36 on prendrait 20 et 2 dans les colonnes marquées 40 et 4, et l'on en ferait la différence 20 — 2 = 18.

Le lecteur trouvera également à la fin du volume une seconde table permettant de passer de façon complètement analogue des logarithmes aux nombres. Il pourra ainsi vérifier par exemple que : 3,8037 = log 63,63.

135. Applications des logarithmes. — L'emploi des tables de logarithmes abrège considérablement les calculs de certaines expressions. Pour en donner un exemple, calculons à l'aide de ces tables :

$$x = \frac{753{,}6 \,.\, (0{,}041)^5 \,.\, \sqrt{0{,}012942}}{\sqrt{0{,}392} \,.\, 0{,}00000458}.$$

Voici dans tous ses détails le calcul à effectuer, la lettre D correspondant aux différences tabulaires.

Données	*Formules*	*Résultats*
$a = 753,6$ $b = 0,041$ $c = 0,012942$ $d = 0,392$ $e = 0,00000458$	$x = \dfrac{a \cdot b^5 \cdot \sqrt[3]{c}}{\sqrt{d \cdot e}}$ $\log x = \log a + 5 \log b +$ $\frac{1}{3} \log c + \frac{1}{2} \operatorname{colog} d +$ $\frac{1}{2} \operatorname{colog} e$	$x = 0,01565$

Calculs auxiliaires	*Calculs définitifs*
$\log 753 = 2,8768 \quad D = 6$ $6 = 4$ $\log a = 2,8772$	$\log a = 2,8772$ $5 \log b = \bar{7},0640$
$\log b = \bar{2},6128$	$\frac{1}{3} \log c = \bar{1},3706$
$\log 0,0129 = \bar{2},1106 \quad D = 33$ $4 = 13$ $\log c = \bar{2},1119$	$\frac{1}{2} \operatorname{colog} d = 0,2033$ $\frac{1}{2} \operatorname{colog} e = 2,6795$ $\log x = \bar{2},1946$
$\log d = \bar{1},5933$ $\operatorname{colog} d = 0,4067$	$\bar{2},1945 = \log 0,01565 \quad D = 3$ $1 \qquad 0,3$ $\bar{2},1946 = \log 0,01565$
$\log e = \bar{6},6609$ $\operatorname{colog} e = 5,3391$	

Pour justifier ces calculs, remarquons d'abord que l'on a d'après ce qui précède :

$$\log x = \log 753{,}6 + 5 \,.\, \log 0{,}041 + \frac{1}{3}\log 0{,}012942 - \frac{1}{2}\log 0{,}392 - \frac{1}{2}\log 0{,}00000458$$

$$= \log 753{,}6 + 5 \,.\, \log 0{,}041 + \frac{1}{3}\log 0{,}012942 + \frac{1}{2}\operatorname{colog} 0{,}392 + \frac{1}{2}\operatorname{colog} 0{,}00000458.$$

On trouve à l'aide de la table des logarithmes des divers termes. On a ensuite à calculer $5 \,.\, \log 0{,}041 = 5 \,.\, \bar{2}{,}6128$, que l'on peut écrire :

$$5 \,.\, \bar{2}{,}6128 = 5\,(-2 + 0{,}6128) = -10 + 3{,}0640 = \bar{7}{,}0640.$$

En pratique on multiplie par 5 comme dans la multiplication ordinaire et l'on termine en ajoutant les deux unités de retenue au produit $\bar{5} \,.\, 2 = \overline{10}$.

On a encore à calculer $\frac{1}{3} \,.\, \log 0{,}012942 = \frac{1}{3} \,.\, \bar{2}{,}1119$. Ce logarithme est égal à $-2 + 0{,}1119 = -3 + 1{,}1119$ dont le tiers est $-1 + 0{,}3706 = \bar{1}{,}3706$. La méthode peut s'appliquer dans tous les cas.

Les calculs par logarithmes sont surtout avantageux lorsque les expressions à calculer ne comportent que des multiplications, des divisions, des élévations aux puissances ou des extractions de racines ; on dit quelquefois que telles expressions sont *calculables par logarithmes*.

136. — Nous donnerons encore une application de ce qui précède aux problèmes d'intérêts composés, problèmes qui conduiraient à des calculs complètement inextricables sans l'emploi des logarithmes.

Une somme C est dite placée à *intérêts composés*, si à la fin de chaque année les intérêts sont réunis au capital. Au bout de la première année (45) la somme est devenue $C + Cr = C(1 + r)$, en désignant par r l'intérêt de 1 fr. en un an. Au bout de la seconde année on a de même : $C(1 + r)\,.\,(1 + r) = C(1 + r)^2$, et ainsi de suite. On verra aisément que cette somme devient au

bout de n années $C(1+r)^n$, ce que l'on peut traduire par la formule :

$$A = C(1+r)^n$$

ou sous forme logarithmique :

$$\begin{aligned}\log A &= \log C + \log (1+r)^n \\ &= \log C + n \,.\, \log (1+r).\end{aligned}$$

On voit que l'on peut dans cette égalité se donner 3 des quatre quantités A, C, r, n ; la quatrième pourra se calculer aisément, tandis que sans l'emploi des logarithmes, il serait en particulier impossible d'avoir n.

Cherchons par exemple au bout de combien de temps une somme placée à 3 °/₀ s'est doublée : il est facile de voir que le résultat ne dépend pas de la somme placée ; on a l'égalité : $2 = (1+r)^n$ ou :

$$\log 2 = n \,.\, \log (1{,}03).$$

La table donnant les logarithmes de $1+r$, table que l'on trouvera à la fin du volume, nous donne ici : $\log 1{,}03 = 0{,}012837$. D'où $n = \dfrac{0{,}3010}{0{,}012837} = 23$ à une unité près par défaut : il faut donc plus de 23 ans et moins de 24 ; le lecteur pourra s'assurer que au bout de 23 ans une somme de 1 fr. serait devenue $1^{f},97$ environ et au bout de 24 ans, $2^{f},03$.

137. Règle à calcul. — La règle à calcul [1] comprend essentiellement une règle et une réglette mobile portant exactement les mêmes divisions (*fig.* 18). Nous ne nous occuperons que des graduations, d'ailleurs identiques, que portent les parties supérieures de la règle et de la réglette.

Parmi les traits marqués, 19 plus importants que les autres portent les numéros :

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100.

[1] Les explications très sommaires qui suivent supposent que le lecteur a entre les mains une règle à calcul du modèle ordinaire de 26 à 30 centimètres de longueur.

(Dans certains modèles les numéros 20, 30, ..., 90, 100 sont remplacés par 2, 3, ..., 9, 10). Le trait 1 est à l'origine de la graduation. Le trait 2 est à une distance : log 2 = 0,301 ... du trait 1, en prenant pour unité de longueur la distance des traits 1 et 10, distance qui est en réalité $12^{cm},5$. Avec cette unité, l'abscisse du trait 2 est donc : log 2. De même le trait 3 a pour abscisse : log 3, ... le trait 10, log 10 = 1 ; ... le trait 100, log 100 = 2.

Les autres traits correspondent à des subdivisions plus petites. Leurs abscisses sont en général :

De 1 à 2	log 1,02 ;	log 1,04 ;	...	log 1,98
2 à 5	log 2,05 ;	log 2,1 ;	...	log 4,95
5 à 10	log 5,1 ;	log 5,2 ;	...	log 9,9
10 à 20	log 10,2 ;	log 10,4 ;	...	log 19,8
20 à 50	log 20,5 ;	log 21 ;	...	log 49,5
50 à 100	log 51 ;	log 52 ;	...	log 99.

Les deux graduations de 1 à 10 et de 10 à 100 sont superposables, car multiplier un nombre par 10 revient à ajouter 1 à son logarithme.

138. — *La règle à calcul permet de multiplier ou de diviser deux nombres en ajoutant ou en retranchant leurs logarithmes.* Pour effectuer le produit 4,85 . 2,3, on place le trait 1 de la réglette (*fig.* 18) sous le trait A d'abscisse log 4,85 de la règle.

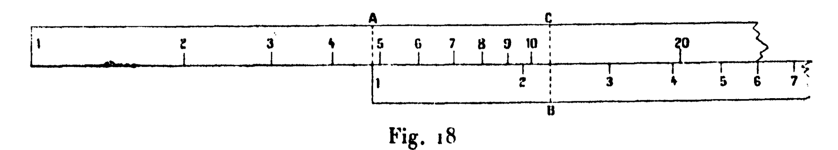


Fig. 18

En face du trait B d'abscisse log 2,3 de la réglette se trouve un trait C dont on lit l'abscisse : log 11,15. Le produit cherché est avec l'approximation que donne la règle 11,15 (en réalité il est égal à 11,155).

La justification est immédiate : l'abscisse de C est la somme des abscisses de A sur la règle et de B sur la réglette.

Donc log 11,15 = log 4,85 + log 2,3, et par suite (**131**) 11,15 = 4,85 × 2,3.

La même position de la réglette montre comment on peut effectuer la division : $\frac{11,15}{2,3} = 4,85$. Si les nombres sur lesquels on opère ne sont pas compris entre 1 et 10 on s'y ramène par un déplacement de la virgule.

La règle à calcul permet de faire rapidement un grand nombre d'autres opérations pour lesquelles nous renvoyons le lecteur aux notices qui accompagnent habituellement chaque règle à calcul.

La règle à calcul présente quelques inconvénients : elle de-demande un certain apprentissage, à moins que l'on ne veuille se borner aux multiplications et aux divisions ; de plus la lecture des nombres devient fatigante si l'on veut demander à la règle une assez grande précision. Par contre lorsqu'on se borne à faire des calculs avec deux ou trois chiffres exacts, c'est un instrument très commode que l'on ne saurait trop recommander.

Exercices. — Nos 53, 54, 55, 56, 57, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 193, 194, 195, 196, 197, 198, 208, 220.

CHAPITRE VI

FONCTIONS ET DÉRIVÉES

139. Fonctions. — Nous avons déjà dit (**41**) que souvent deux quantités sont liées l'une à l'autre de telle sorte que toute variation de la première entraîne une certaine variation de la seconde ; on considère alors l'une d'elles comme *fonction* de l'autre qui s'appelle alors la *variable indépendante.* C'est là une notion fondamentale, car, dans toute étude numérique d'un phénomène, pour étudier les variations simultanées de deux quantités, on peut dresser une table numérique des mesures faites. Voici, par exemple, une telle liste indiquant quel est approximativement le poids moyen d'un enfant jusqu'à l'âge de deux ans, ce poids étant exprimé en kilogrammes :

Age	Poids	Age	Poids	Age	Poids	Age	Poids
Naissce	3,200	7 mois	7,560	13 mois	9,200	19 mois	10,400
1 mois	3,870	8 »	7,870	14 »	9,410	20 »	10,490
2 »	4,630	9 »	8,190	15 »	9,700	21 »	10,640
3 »	5,350	10 »	8,500	16 »	10,000	22 »	10,800
4 »	6,020	11 »	8,800	17 »	10,210	23 »	10,900
5 »	6,650	12 »	9,000	18 »	10,310	24 »	11,000
6 »	7,100						

On considère ici l'âge de l'enfant comme la variable et son poids comme fonction de cette variable.

Une telle liste ne suppose pas que la fonction étudiée dépende uniquement de la variable considérée. Le poids moyen d'un enfant varie non seulement avec l'âge, mais aussi avec la race, le climat, etc... C'est là un aspect de la question que nous laisserons complètement de côté.

Nous allons montrer comment ou peut étudier de façon simple une fonction par des procédés mathématiques, sans nous préoccuper de la signification concrète de la fonction étudiée, ni des lois que l'on peut parfois déduire d'une telle étude.

En Algèbre, on désigne habituellement par x la variable et par $f(x)$ ou y la fonction considérée de cette variable. C'est ainsi que $y = x^2$ indique que la fonction y est constamment le carré de la variable x. Dans le cas des *fonctions empiriques*, c'est-à-dire des fonctions fournies par des mesures expérimentales, comme le poids moyen d'un enfant, on sait quelle est la valeur de y correspondant à une valeur donnée pour x, mais l'on ne connaît pas comme pour $y = x^2$, une formule mathématique permettant de résumer tout un tableau numérique.

Dans un cas comme dans l'autre, il est avantageux comme nous allons le voir, de recourir à une *représentation graphique.*

140. Représentation graphique des fonctions. — Nous savons (**66**) qu'on peut représenter un nombre x positif ou négatif par un point pris sur une droite. Nous allons maintenant représenter par un point pris dans le plan du dessin un couple de valeurs numériques x, y [1]. Reprenons le tableau numérique donnant le poids moyen d'un enfant en fonction de son âge. Nous voyons que pour l'âge $x = 12$ mois, le poids moyen est $y = 9$ kilogrammes. Prenons (*fig.* 19) deux *axes de coordonnées*, c'est-à-dire deux droites rectangulaires Ox, Oy graduées comme l'indique la figure ; portons sur Ox un segment $\overline{ON} = 12$. Par ce point, menons une parallèle à Oy et prenons sur cette

(1) Tout ce qui suit suppose connues les premières notions de géométrie. Cependant, les propriétés que nous emprunterons à la géométrie seront toujours très élémentaires.

parallèle un segment $\overline{NL} = \overline{OP} = 9$. Le point L a par définition pour *abscisse* : $x = \overline{ON} = 12$ et pour *ordonnée* : $y = \overline{OP} = 9$. Il représente le couple des valeurs numériques : 12 et 9 ; il admet ces deux nombres comme *coordonnées*. Si l'on remarque que PL est parallèle à Ox, on voit que L peut encore être construit par l'intersection des parallèles aux axes NL et PL.

Appliquons ce mode de représentation à tous les nombres du tableau ; on trouve les divers points marqués en A, B, C, ..., L, .. Z (*fig.* 19). Leur ensemble donne une idée beaucoup plus

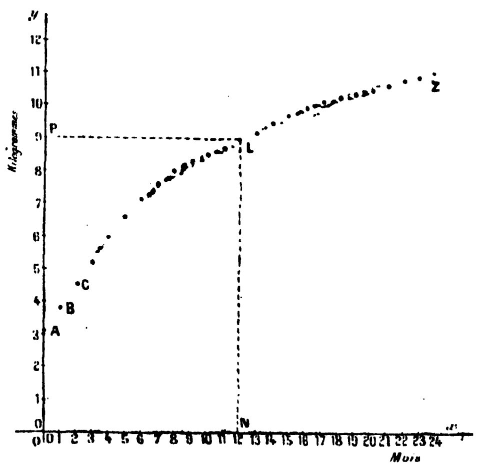


Fig. 19

nette de la croissance du poids d'un enfant que l'inspection du tableau numérique qui nous a servi. On y voit par exemple que le poids augmente constamment, que cette augmentation est de plus en plus lente (**156**), etc.

141. — On a une idée encore plus nette du phénomène étudié en joignant les points marqués par un trait continu appelé *courbe* (*fig.* 20). Il est certain que les 25 points marqués ne suffisent pas à définir ce trait : on peut joindre deux points consécutifs de façon absolument quelconque, mais, en fait, il n'y aura pas une grande différence entre les courbes qui pourraient être tracées par deux dessinateurs différents. Cependant,

lorsque les points considérés sont trop écartés, on se borne à les réunir deux à deux par des segments de droite qui servent uniquement à préciser leur ordre de succession.

Pour faciliter les constructions, nous avons tracé la courbe comme on le fait souvent sur du *papier quadrillé* (**214**), c'est-à-dire divisé en petits carreaux. Un mois correspond ici à un carreau sur Ox, et un kilogramme à 2 carreaux sur Oy.

On trouve dans le commerce, outre le papier quadrillé ordinaire, du *papier millimétrique* dans lequel les petits carreaux

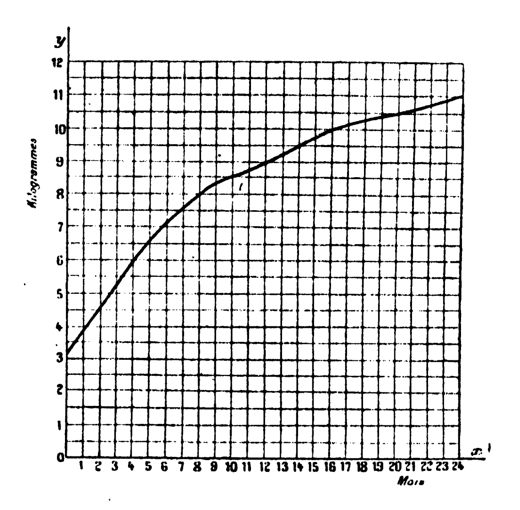


Fig. 20

ont 1 millimètre de côté. On a ainsi une précision largement suffisante pour la pratique (¹).

Une telle représentation graphique permet non seulement de savoir immédiatement comment varie la fonction représentative, mais encore complète le tableau numérique des données. Pour savoir quel est le poids moyen d'un enfant à l'âge de 12 mois et demi, on prendra le point d'abscisse 12,5 (*fig.* 20). Son ordonnée est approximativement $9^{kg},100$. C'est le poids

(¹) Les figures de ce chapitre ne sont données qu'à titre d'indication ; la plupart d'entre elles devraient être tracées à une échelle beaucoup plus grande pour donner des résultats suffisamment précis.

cherché. Bien que le tracé de la courbe ne soit pas rigoureusement défini dans la région considérée, les résultats obtenus par ce procédé sont suffisamment précis en pratique. Le même graphique permet de savoir à quel âge un enfant a un poids donné. C'est ainsi que le poids de 6 kilogrammes est atteint en moyenne un peu avant 4 mois.

L'importance de ces graphiques est considérable et nous ne saurions trop engager le lecteur à se familiariser avec ce procédé. Citons parmi les très nombreux exemples que l'on pourrait énumérer : dans l'industrie, les courbes de solubilité, les cycles de thermodynamiques, les diagrammes de machines à vapeur, les graphiques de chemin de fer (**237**), les courbes de tension de la vapeur d'eau,... ; en météorologie, les courbes thermométriques, barométriques ou hygrométriques,... ; en médecine, les graphiques donnant la température ou la pression artérielle d'un malade,... ; dans les sciences sociales, les courbes de probabilité, les courbes de mortalité, les graphiques de l'importation, de l'exportation, du rendement des impôts, de la cote d'une valeur en Bourse, etc., etc...

142. Notions de géométrie analytique. — Examinons plus particulièrement ce que devient la notion de représentation graphique dans le cas où la fonction considérée admet une définition mathématique rigoureuse, telle que par exemple : $y = ax + b$; $y = ax^2 + bx + c$, etc.

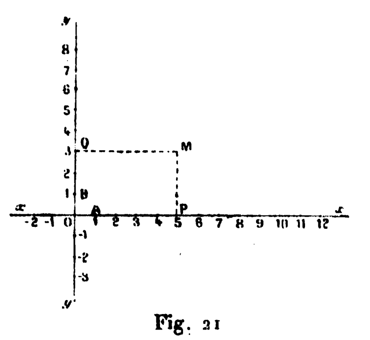


Fig. 21

Nous supposerons dès maintenant, ce qui n'était pas indispensable au même titre dans le cas des fonctions empiriques, que l'unité de longueur $\overline{OA} = +1$ avec laquelle on mesure les abscisses (*fig.* 21) est égale à l'unité de longueur $\overline{OB} = +1$ avec laquelle on mesure les ordonnées. Remarquons que le signe des coordonnées $\overline{OP}$, $\overline{OQ}$ d'un point M indique, d'après

le tableau suivant, dans lequel des 4 angles de coordonnées xOy, xOy', $x'Oy'$, $x'Oy$ se trouve ce point.

Angles :	xOy	xOy'	$x'Oy'$	$x'Oy$
Signe de l'abscisse :	+	+	—	—
Signe de l'ordonnée :	+	—	—	+

Si le point M est sur Oy son abscisse est nulle ; s'il est sur Ox son ordonnée est nulle.

Si nous cherchons à tracer le graphique d'une fonction quelconque, $y = x^2$ (**146**) par exemple, nous pouvons, en donnant à x des valeurs quelconques, construire autant de points que nous le voulons. Mais ici le tracé de la courbe joignant tous ces points sera parfaitement défini, puisqu'on peut avoir des points aussi rapprochés qu'on le veut, en prenant pour x des valeurs suffisamment voisines (**152**). Toute fonction pourra être ainsi représentée par un tracé graphique défini sans ambiguïté. Inversement, on démontre que toute courbe définie géométriquement comme lieu de points correspond à une certaine fonction dont elle est la représentation graphique.

C'est là l'idée fondamentale de la *géométrie analytique*. Suivant les cas, on étudie les fonctions que fournit l'algèbre à l'aide de courbes dont on connaît les propriétés graphiques ; ou bien on démontre des théorèmes de géométrie concernant des droites ou des courbes quelconques en faisant des raisonnements sur les fonctions qu'elles représentent.

Il faut bien noter que cette idée diffère de celle qui consiste à représenter une fonction, empirique ou non, par un graphique, dans le seul but d'en étudier plus aisément les variations.

143. Fonction linéaire. — *On appelle fonction linéaire, la fonction $y = ax + b$*, dans laquelle la variable x n'entre qu'au premier degré. Les lettres a et b représentent des coefficients numériques connus.

Prenons une telle fonction $y = 2x + 3$. Si l'on construit un grand nombre de points de la courbe représentative on trouve qu'ils sont en ligne droite. Nous allons démontrer ce résultat.

Pour $x = 0$, on a $y = 2 . 0 + 3 = 3$ ce qui donne le point M de Oy (*fig.* 22). Pour $x = 1 = \overline{OA}$, on a $y = 2 . 1 + 3 = \overline{AN}$. Pour construire cette ordonnée, portons d'abord $\overline{Aa} = 3$, puis $\overline{aN} = 2 . 1 = 2$. Prenons une autre abscisse quelconque $\overline{OB} = - 3{,}5$; on a l'ordonnée $\overline{BP} = 2(-3{,}5) + 3$. Portons d'abord $\overline{Bb} = 3$, puis $\overline{Bp} = 2(-3{,}5) = -7$. On procèderait de même pour toute autre valeur donnée à x.

Les points M, a, b d'ordonnée égale à 3, sont sur une parallèle à Ox passant par M. On a en outre $\frac{\overline{aN}}{\overline{Ma}} = \frac{2 . 1}{1} = 2$;

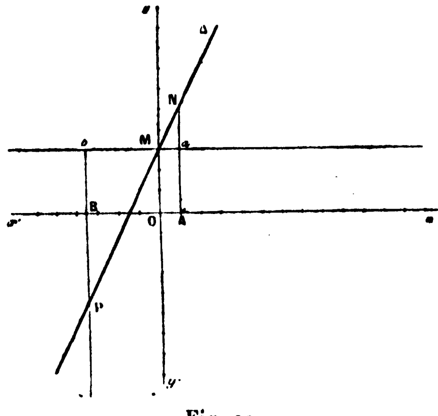


Fig. 22

et $\frac{\overline{bP}}{\overline{Mb}} = \frac{2(-3{,}5)}{-3{,}5} = 2$. Les triangles rectangles MaN et MbP sont semblables, les côtés de l'angle droit étant proportionnels (**248**). On en déduit que les angles aMN et bMP sont égaux et par suite que P est sur la droite MN. Ce raisonnement s'appliquant quelle que soit la valeur donnée à x, la courbe représentative est une droite.

144. — Inversement, nous allons voir que toute droite tracée dans le plan des deux axes de coordonnées Ox, Oy représente une fonction linéaire. Prenons d'abord une droite telle que Δ (*fig.* 23) qui ne soit parallèle à aucun des axes et coupe Oy en M d'ordonnée $\overline{OM} = 3$, et prenons le point N d'abscisse

$\overline{OA} = +1$. Son ordonnée est ici $\overline{AN} = 5$. Prenons un autre point P d'abscisse quelconque $x = \overline{OB}$. La parallèle à Ox menée par M coupe les ordonnées de M et P en a et b d'ordonnées $\overline{Aa} = \overline{Bb} = \overline{OM} = 3$. D'autre part les triangles MaN et MbP sont semblables et donnent : $\frac{\overline{aN}}{\overline{Ma}} = \frac{\overline{bP}}{\overline{Mb}}$. Le premier rapport est égal à $\frac{5-3}{1} = \frac{2}{1} = 2$. Donc, quelle que soit l'abscisse $x = \overline{OB}$, on a $\frac{\overline{bP}}{\overline{Mb}} = 2$, ou $\overline{bP} = 2 . \overline{Mb}$. Mais l'ordonnée de P

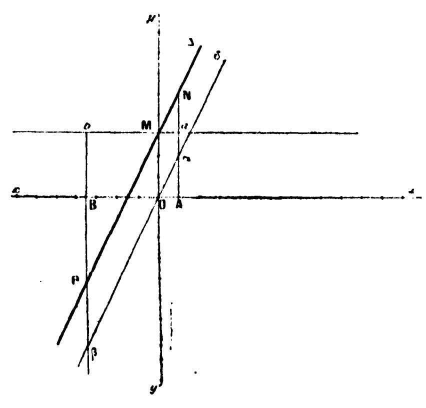


Fig. 23

étant représentée par y, on a $\overline{bP} = y - 3$, que l'on peut écrire $y - 3 = 2x$, ou

$$y = 2x + 3.$$

C'est l'équation de la droite Δ.

Si la droite Δ est parallèle à Ox, comme par exemple Mb tous ses points ont la même ordonnée 3 ; son équation est $y = 3$. Si la droite est parallèle à Oy, comme AN, les points ont tous la même abscisse ; son équation est $x = 1$. En particulier l'équation de Ox est $y = 0$, et celle de Oy est $x = 0$.

De façon plus générale, on dit parfois que l'équation d'une droite est de la forme $Ax + By + C = 0$ et qu'inversement une telle équation représente une droite. Tous les cas qui précèdent rentrent dans cette formule : si A est nul, mais non B,

elle s'écrit $By + C = 0$; ou : $y = -\frac{C}{B}$: on a une droite parallèle à Ox. De même si B est nul, mais non A on trouve la parallèle à Oy : $x = -\frac{C}{A}$. Enfin, dans tout autre cas, on peut diviser par B et écrire successivement :

$$\frac{A}{B}x + y + \frac{C}{B} = 0$$

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

ou enfin

$$y = ax + b$$

en posant $a = -\frac{A}{B}$; $b = -\frac{C}{B}$.

En résumé, *toute équation du premier degré est représentée graphiquement par une ligne droite et toute ligne droite représente une équation du premier degré.*

145. — Etudions ce que devient la droite Δ, représentée par l'équation $y = ax + b$ quand a et b varient. On a vu que b est l'abscisse du point M où la droite coupe Oy (*fig.* 23) et que a est le rapport constant $\frac{\overline{bP}}{\overline{Mb}} = \frac{\overline{aN}}{\overline{Ma}}$. Si l'on mène la parallèle δ à Δ par O, on voit que l'équation de cette seconde droite est $y = ax$, car ici $b = 0$ et de plus $\frac{\overline{A\alpha}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{B\beta}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{aN}}{\overline{Ma}} = a$. Donc quand b varie seul, le point M se déplace sur Oy et toutes les droites Δ correspondantes sont parallèles à δ qui passe par O et a pour équation $y = ax$. En particulier il est très important de remarquer que *la fonction linéaire $y = ax$ représente une droite passant par l'origine.*

Etudier ce que deviennent les droites Δ quand a varie revient donc à étudier comment varie la direction de δ. Le nombre a qui correspond uniquement à la direction des droites Δ ou δ s'appelle leur *pente* ou *coefficient angulaire*. On a d'ailleurs (**163**) $a = \text{tg } A\alpha O = \text{tg } \theta$. Puisque $\overline{OA} = +1$, on a aussi

$a = \frac{\overline{A\alpha}}{\overline{OA}} = \overline{A\alpha}$. La pente varie comme le segment $\overline{A\alpha}$. Si l'on suppose Ox horizontal et Oy vertical, le mot de « pente » correspond bien ici à son sens usuel..

Voici à titre d'indication un tableau résumé indiquant la correspondance entre la valeur de θ en grades et celles de a :

θ	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
a	0	0,16	0,32	0,51	0,73	1	1,38	1,96	3,08	6,31	∞

Le signe ∞ indique que a croît indéfiniment (**159**).

Si a est négatif, le point α est au-dessous de A et l'on aurait des résultats analogues.

La fonction linéaire $y = ax + b$ que nous venons d'étudier est à la fois une des fonctions les plus simples et les plus importantes. En géométrie analytique, elle correspond à la plus simple de toutes les courbes : la ligne droite et en mécanique au plus simple de tous les mouvements : le mouvement uniforme (**327**).

146. Autres fonctions. — Prenons la fonction $y = x^2$. La construction point par point donne la forme générale de la courbe représentative (*fig.* 24). Nous allons nous borner à préciser quelques détails.

Il suffit de construire avec soin une moitié de la courbe. Prenons en effet deux abscisses quelconques $\overline{OP}$, $\overline{OP'}$ égales et de signes contraires : $x = 1$; $x = -1$; les ordonnées correspondantes sont $\overline{PM} = (1)^2 = 1$ et $\overline{P'M} = (-1)^2 = 1$. Elles sont égales, donc M et M′ sont *symétriques* par rapport à Oy (**196**). Ceci ayant lieu quelles que soient les abscisses considérées, *la courbe admet* Oy

Fig. 24

pour axe de symétrie. Il suffira de construire avec soin la branche de la courbe située dans l'angle xOy.

Pour $x = 0$ on a $y = 0$. La courbe passe en O. Pour étudier sa forme au voisinage de O donnons à x des valeurs très petites et calculons les valeurs correspondantes de y :

$x =$	1	0,5	0,1	0,05	0,01	. .
$y =$	1	0,25	0,01	0,0025	0,0001.	.

On voit que même si le dessin est fait avec une grande précision, les valeurs de y deviennent rapidement négligeables au voisinage de l'origine : la courbe est beaucoup plus près de Ox que de Oy. Nous démontrerons que Ox est *tangente* (**154**) à la courbe en O.

Donnons maintenant à x, supposé positif, des valeurs de plus en plus grandes ; y prend aussi des valeurs très grandes. On a par exemple le tableau suivant :

$x =$	10	50	100	500	1 000	. .
$y =$	100	2 500	10 000	250 000	1 000 000	. .

La branche correspondante de la courbe s'éloigne indéfiniment, mais on voit que les ordonnées croissent beaucoup plus vite que les abscisses : la courbe est beaucoup plus près de Oy que de Ox.

Cette courbe $y = x^2$ s'appelle une *parabole*. Le point O est le *sommet* de la parabole. Le lecteur pourra construire les courbes $y = ax^2$ pour diverses valeurs de a ; on les appelle aussi des paraboles (**160**).

147. — Pour la courbe représentative de la fonction $y = \frac{1}{x}$, nous laissons au lecteur le soin de vérifier que son allure générale est celle de la courbe tracée (*fig.* 25), et de prouver si un point M de coordonnées $\overline{OP} = \alpha$, $\overline{PM} = \beta$ fait partie de la courbe, le point M′ de coordonnées $\overline{OP'} = -\alpha$; $\overline{P'M'} = -\beta$ en fait également partie. Les deux points M et M′ sont *symétriques* par rapport à O. On dit que *la courbe admet l'origine*

comme centre de symétrie (**196**). Il suffira par suite de construire avec soin une des moitiés de la courbe, par exemple celle qui est dans l'angle xOy.

Etudions la forme des *branches infinies* de cette courbe en donnant à x des valeurs d'abord très grandes puis très petites.

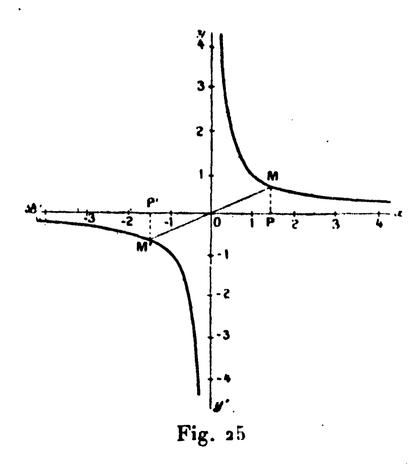


Fig. 25

Pour x très grand, on a par exemple :

$x =$	10	50	100	500	1 000	. .
$y =$	0,1	0,02	0,01	0,002	0,001	. .

On voit que y devient de plus en plus petit : la courbe le rapproche de plus en plus de Ox, mais sans jamais l'atteindre : on dit que Ox est une *asymptote* de la courbe. De même donnons à x des valeurs petites :

$x =$	0,1	0,05	0,01	0,005	0,001	. .
$y =$	10	20	100	2 000	1 000	. .

L'ordonnée croît de façon très rapide, quand l'abscisse tend vers o. La courbe se rapproche de plus en plus de Oy sans jamais l'atteindre ; pour $x = 0$, $y = \frac{1}{x}$ n'a d'ailleurs aucune signification. L'axe Oy est une seconde asymptote.

La courbe $y = \frac{1}{x}$ s'appelle une *hyperbole équilatère*. On ap-

pelle encore ainsi toutes les courbes $y = \frac{a}{x}$ quelle que soit la valeur de a.

148. — Parmi les autres fonctions simples que nous pourrions étudier, citons la fonction $y = \sqrt{1 - x^2}$, qui est remarquable, parce que la courbe représentative est une demi-circonférence de rayon 1, telle que celle qui est tracée en trait plein (*fig.* 26). Remarquons en effet que la distance d'un point de coordonnées x, y à l'origine est donnée par le théorème de Pythagore (**251**) : $x^2 + y^2 = 1$, d'où l'on tire $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$.

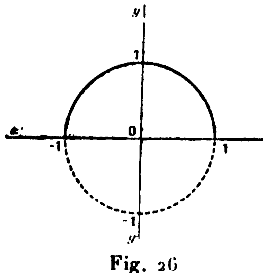


Fig. 26

Si l'on prend le signe + devant le radical on a seulement la demi-circonférence supérieure ; le signe — donnne la demi-circonférence inférieure. On aurait de même une circonférence de rayon a pour $y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$.

Les fonctions $y = \sin x$; $y = \cos x$; $y = \text{tg } x$ seront étudiées en trigonométrie (**166, 167**).

149. Utilisation de quelques graphiques. — Les graphiques peuvent, comme nous l'avons déjà dit (**140**) remplacer une table numérique. Supposons qu'un commerçant vende du calicot à raison de 87^f,50 les 100 mètres. Le prix y francs d'un certain nombre x de mètres étant proportionnel à ce nombre de mètres, le rapport $\frac{y}{x}$ a une valeur constante, qui est ici $\frac{87,50}{100} = 0,875$. On construit la droite $y = 0,875\,x$ sur une feuille de papier millimétrique en construisant avec soin un point et le joignant à l'origine que l'on pourra prendre au bas et à gauche de la feuille. L'utilisation d'un tel graphique est immédiate. Il permet de savoir rapidement quel est le prix de 17 mètres de calicot, de 3^m,50, etc... ou inversement de savoir combien on a de mètres pour 15 francs, pour 19^f,25, etc...

De façon analogue, le tracé sur papier millimétrique de la

parabole $y = x^2$ remplace une table de carrés des nombres, si l'on mesure une ordonnée y connaissant l'abscisse x. Il remplace une table de racines carrées si l'on se donne y et que l'on mesure x. La courbe $y = x^3$ remplace une table de cubes ou de racines cubiques ; $y = \frac{1}{x}$ une table des inverses des nombres. Une table de logarithmes peut de même être remplacée par la courbe d'équation $y = \log x$, donnant le logarithme y d'un nombre connu x ; etc...

150. — On peut aussi, comme nous allons le montrer, utiliser des courbes représentatives à la résolution d'équations du premier ou du second degré.

Prenons une équation du premier degré à une inconnue $y = 4{,}6\,x + 3{,}9 = 0$. Construisons la droite représentant la fonction linéaire $y = 4{,}6\,x + 3{,}9$ (*fig.* 27) en construisant par exemple les points M et N d'abscisses 0 et — 1. Le point P où elle coupe Ox ayant une ordonnée nulle, son abscisse x est telle que l'on ait $0 = 4{,}6\,x + 3{,}9$. C'est précisément la racine cherchée. Il suffit donc de mesurer $\overline{OP}$ qui est ici égal à — 0,85. On voit d'ailleurs qu'il n'y a pas d'autres solutions possibles.

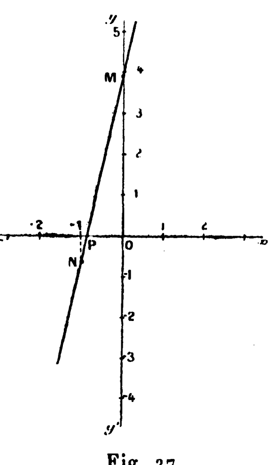


Fig. 27

Prenons maintenant un système de deux équations à deux inconnues tel que :

$$\begin{cases} 2{,}3x + 2{,}7y = 1{,}1 \\ 3{,}8x - 1{,}9y = 5{,}6. \end{cases}$$

On construit les deux droites Δ et Δ' (*fig.* 28) qui représentent ces équations. Elles se coupent au point P dont les coordonnées x, y satisfont à la fois aux deux équations et constituent par suite un système de solutions. Inversement tout système de so-

lutions x, y donne un point commun aux deux droites. Il y a donc ici un système et et un seul de solutions : $x = \overline{OQ} = 1,2$; $y = \overline{QP} = -0,6$.

On établirait aisément que, lorsque le système formé par deux équations du premier degré à deux inconnues est impossible, les droites correspondantes sont parallèles et n'ont aucun point commun ; lorsqu'il est indéterminé, les droites sont confondues et ont tous leurs points communs.

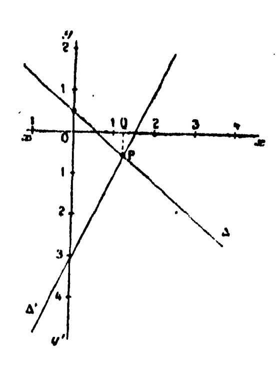


Fig. 28

Nous engageons le lecteur à reprendre par la méthode qui précède, tous les problèmes du premier degré à deux inconnues que nous avons déjà traité par le calcul (**102** et suivants).

151. — Pour résoudre une équation du second degré quelconque, par exemple :

$$3,7x^2 - 0,8x - 7,9 = 0$$

construisons une fois pour toutes et avec le plus grand soin la parabole $y = x^2$ qui servira quelle que soit l'équation considérée, et remarquons que toute solution x, y du système :

$$\begin{cases} 3,7y - 0,8x - 7,9 = 0 \\ y = x^2 \end{cases}$$

est telle que x est racine de l'équation du second degré proposée. Inversement une telle racine x et son carré y constituent un système de solutions de ces équations. On construit les deux courbes correspondantes qui sont une droite Δ (*fig.* 29) et la parabole $y = x^2$. Les points communs à ces courbes sont P d'abscisse $x = -1,4$ et Q d'abscisse $x = 1,6$. Ce sont les seules racines de l'équation donnée.

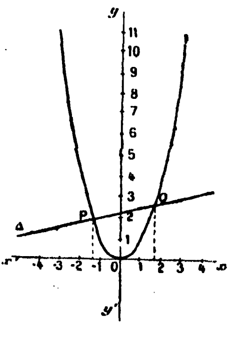


Fig. 29

Lorsqu'une équation du second degré n'a pas de racines c'est que la droite Δ ne coupe pas la parabole ; si elle a une seule racine, on démontre que la droite est tangente à la parabole.

De façon analogue, on résoudra le système :

$$\begin{cases} x + y = 3{,}27 \\ xy = 9{,}81 \end{cases}$$

par l'intersection de la droite $x + y = 3{,}27$ et de l'hyperbole équilatère $y = \frac{9{,}81}{x}$. Le système

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4{,}27 \\ x + y = 0{,}32 \end{cases}$$

conduit à l'intersection d'une droite avec le cercle $y = \sqrt{4{,}27 - x^2}$ de centre à l'origine et de rayon $\sqrt{4{,}27}$; etc..

152. Dérivées. — Prenons une quelconque des fonctions déjà étudiées $y = x^2$ et un point M de cette courbe (*fig.* 30) de coordonnées $x = 0{,}8$; $y = x^2 = 0{,}8^2 = 0{,}64$. Nous allons établir d'abord que la fonction $y = x^2$ est *continue* en ce point, c'est-à-dire que si l'abscisse x diffère suffisamment peu de 0,8, l'ordonnée y sera aussi rapproché de 0,64 qu'on le voudra, ce qui revient à dire qu'il y a des points de la courbe aussi voisins qu'on le veut de M. Cherchons par exemple un point d'abscisse α et d'ordonnée $\beta = \alpha^2$ tel que la différence des ordonnées $\beta - 0{,}64$ ne dépasse pas 0,01 ce que l'on peut écrire :

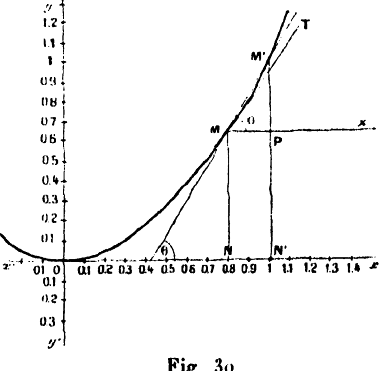


Fig. 30

$$0{,}64 - 0{,}01 < \beta < 0{,}64 + 0{,}01$$

ou

$$0{,}63 < \alpha^2 < 0{,}65$$

α étant ici positif, il suffira évidemment de le prendre supérieur à la racine carrée par excès de 0,63, racine calculée par exemple à 0,001 près. De même, pour vérifier la deuxième inégalité, on prendra α inférieur à la racine carrée par défaut à 0,001 près de 0,65 :

$$0{,}794 < \alpha < 0{,}806.$$

C'est ainsi que $\alpha = 0{,}795$ est l'abscisse d'un point répondant à la question. Le même raisonnement s'appliquant à toutes les valeurs de x, montre que $y = x^2$ est continue quel que soit x, ou, comme l'on dit, est une *fonction continue*.

Nous n'insisterons pas davantage sur cette notion de continuité que le lecteur trouvera exposée de façon plus complète dans les traités d'algèbre et d'analyse. Toutes les fonctions que nous considérerons sont continues, sauf parfois pour certaines valeurs remarquables de la variable. C'est ainsi que $y = \frac{1}{x}$ est *discontinue* pour $x = 0$, car y n'ayant plus aucun sens pour cette valeur de x, le raisonnement qui précède ne pourrait plus s'appliquer.

153. — Reprenons le point M et un point M′ voisin (*fig.* 30). La corde MM′ est presque confondue avec la courbe de M en M′. Sa pente est dite la *pente moyenne* de la courbe de M en M′. Quand M′ se rapproche de plus en plus de M ou comme l'on dit tend vers M, cette corde MM′ a, comme nous allons le voir, une position limite MT, que l'on appelle la *tangente* en M (**229**). Son coefficient angulaire peut être considéré en quelque sorte comme donnant la pente de la courbe en M. Il est intéressant de le calculer.

Soient 0,8 et 0,64 les coordonnées de M et soient d'autre part α et $\beta = \alpha^2$ celles du point voisin M′. Si θ est l'angle de MM′ avec Ox, ou avec Mz parallèle à Ox menée par M, le coefficient angulaire de MM′ est comme on le sait égal à $\operatorname{tg}\theta$ et par suite à $\frac{\overline{PM'}}{\overline{MP}}$. Mais

$\overline{PM'} = \overline{N'M'} - \overline{NM} = \beta - 0{,}64$ et $\overline{MP} = \overline{ON'} - \overline{ON'} = \alpha - 0{,}8.$

On a donc (**153**) :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\beta - 0{,}64}{\alpha - 0{,}8} = \frac{\alpha^2 - 0{,}8^2}{\alpha - 0{,}8} = \alpha + 0{,}8.$$

Quand M′ se rapproche de plus en plus de M, ce qui est possible puisque $y = x^2$ est une fonction continue, α tend vers 0,8 et par suite tg θ vers $0{,}8 + 0{,}8 = 1{,}6$. C'est là le coefficient angulaire de MT. Il faut remarquer que le raisonnement donne le même résultat que M′ soit pris à gauche où à droite de M, pourvu qu'il se rapproche de M.

154. — Plus généralement prenons une fonction quelconque $y = f(x)$, un point M de coordonnées x, y de la courbe représentative, et un point voisin M′ dont on peut représenter les coordonnées par $x + h$, $y + k$. La différence h des abscisses de M′ et M s'appelle l'*accroissement* de la variable x ; cet accroissement est positif si M′ est à droite de M et négatif dans le cas contraire. La différence k des ordonnées est l'accroissement correspondant de y ; il est positif si M′ est au-dessus de M et négatif dans le cas contraire. Le coefficient angulaire de la corde MM′ est $\frac{k}{h}$. Quand M′ tend vers M et par suite quand h tend vers 0, ce rapport $\frac{k}{h}$ a en général une limite qui est par définition le coefficient angulaire de la tangente en M à la courbe. On l'appelle la *dérivée de y par rapport à x* [1], pour la valeur particulière de x considérée, et on la désigne par y' ou $f'(x)$.

Si nous reprenons le cas de la parabole $y = x^2$ on a pour le point M′ : $y + k = (x + h)^2$. On en tire, en tenant compte de $y = x^2$:

$$k = (x + h)^2 - x^2 = x^2 + 2hx + h^2 - x^2 = 2hx + h^2$$

et par suite :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{k}{h} = 2x + h.$$

[1] Nous verrons plus loin (**329**) que la notion de dérivée est au fond identique à celle de vitesse.

Quant h tend vers O, tg θ tend vers $2x$; c'est la valeur de la dérivée :

$$y' = 2x.$$

Ceci correspond bien au résultat numérique déjà obtenu pour $x = 0{,}8$, car on a $y' = 2 \cdot 0{,}8 = 1{,}6$. On retrouve également un autre résultat déjà indiqué (**146**) : la tangente en O est Ox, car en ce point $y' = 2 \cdot 0 = 0$.

Si l'on applique la même méthode à la recherche de la dérivée de $y = ax + b$, on a : $y + k = a(x + h) + b$, et par suite $k = ah$, ou $\operatorname{tg} \theta = \frac{k}{h} = a$, ou enfin $y' = a$, résultat facile à prévoir si l'on se rapporte d'une part à la définition de la dérivée, et d'autre part à celle du coefficient angulaire d'une droite.

A chaque fonction $y = f(x)$ correspond ainsi une fonction $y' = f'(x)$; par exemple pour $y = x^2$, on a la fonction $y' = 2x$. *Cette fonction y' s'appelle la fonction dérivée de y.* Nous trouverons en trigonométrie des calculs analogues à ceux qui précèdent, dans la recherche des dérivées des fonctions circulaires (**178, 333**).

155. — Il existe un grand nombre de règles permettant la dérivation rapide de fonctions de formes très diverses. Nous nous bornerons ici à examiner le cas très simple où la fonction y de la variable x, peut être considéré comme la somme, le produit ou le quotient de deux autres fonctions u et v de la même variable, fonctions que nous supposerons continues. La dérivée y' se calcule alors immédiatement si l'on connaît les dérivées u' et v' des deux fonctions u et v par rapport à x.

Prenons d'abord le cas de la somme : $y = u + v$, et donnons à x un accroissement h, d'où résultent pour u, v et y, des accroissements respectifs a, b et k. On a $y + k = (u + a) + (v + b)$, et par suite $k = a + b$. On en déduit pour le rapport $\frac{k}{h}$:

$$\frac{k}{h} = \frac{a + b}{h} = \frac{a}{h} + \frac{b}{h}.$$

Si h tend vers o, par hypothèse les rapports $\frac{a}{h}$ et $\frac{b}{h}$ tendent respectivement vers u' et v' dérivées de u et v par rapport à x. On en conclut que $\frac{k}{h}$ a une limite y' donnée par :

$$y' = u' + v'$$

Le même raisonnement appliqué à une fonction y liée à u et v par la relation $y = Au + Bv$, dans laquelle A et B désignent des constantes, conduirait à la dérivée $y' = Au' + Bv'$.

Si y est le produit des fonctions u et v c'est-à-dire si $y = uv$, en gardant les mêmes notations que ci-dessus pour les divers accroissements, on a :

$$y + k = (u + a)(v + b)$$

et par suite :

$$k = (u + a)(v + b) - uv = ub + va + ab$$

Le rapport $\frac{k}{h}$ est alors donné par :

$$\frac{k}{h} = \frac{ub + va + ab}{h} = u \cdot \frac{b}{h} + v \cdot \frac{a}{h} + \frac{a}{h} \cdot b$$

D'après les hypothèses déjà faites les limites des deux premières parties sont $u \cdot v'$ et $v \cdot u'$. Quant au dernier terme c'est le produit de b, qui tend vers o, par le rapport $\frac{a}{h}$, qui a une limite finie ou nulle ; il tend donc vers o, et l'on trouve :

$$y' = uv' + vu'$$

Enfin si $y = \frac{u}{v}$, nous supposerons expressément que pour la valeur considérée de x, le dénominateur v ne soit pas nul, sans quoi la fraction n'aurait plus de sens. On trouve ici :

$$k = \frac{u + a}{v + b} - \frac{u}{v} = \frac{(u + a)v - u(v + b)}{v(v + b)} = \frac{av - bu}{v(v + b)}$$

On peut d'ailleurs supposer h assez petit pour que dans l'intervalle de v à $v + b$, la fonction v ne prenne pas de valeur nulle,

si l'on suppose cette fonction continue. Si maintenant nous divisons les deux membres par h, on a :

$$\frac{k}{h} = \frac{\frac{a}{h} \cdot v - \frac{b}{h} \cdot u}{v(v + b)}$$

et en supposant que h tend vers o :

$$y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}.$$

L'application de ces règles est immédiate ; c'est ainsi que le lecteur en déduira sans peine que la dérivée de $y = ax^2 + bx + c$ est $y' = 2ax + b$; que celle de $y = \frac{1}{x}$ est $y' = \frac{-1}{x^2}$, etc...

156. Variation des fonctions. — Une fonction y de x est dite *croissante* pour une valeur x de la variable, lorsque y croît quand x croît et décroît quand x décroît. Si l'on donne à x un accroissement h positif, k est par suite positif ; si h est négatif, k l'est également. Le rapport $\frac{k}{h}$ est donc toujours positif. Sa limite qui est la dérivée y' a même signe : *lorsqu'une fonction est croissante pour une valeur x de la variable, sa dérivée est positive ou nulle, pour cette valeur.* Nous verrons plus loin ce qui correspond au cas où la dérivée est nulle. Cette propriété est presque évidente géométriquement, car elle revient à dire que pour une fonction croissante le coefficient angulaire de la tangente est positif.

Une fonction y de x est *décroissante* pour une valeur x de la variable si y décroît quand x croît, et croît quand x décroît. On établit comme précédemment que, *lorsqu'une fonction est décroissante pour une valeur x de la variable, sa dérivée est négative, ou nulle, pour cette valeur.*

Par exemple, la fonction représentée par la courbe Γ (*fig.* 31) est croissante au voisinage de M, et décroissante au voisinage de M'.

157. — On dit qu'une fonction est *maximum* pour une valeur x de la variable, lorsque la valeur correspondante y de la fonction est plus grande que toutes les valeurs voisines. C'est ce qui a lieu au point N (*fig.* 31).

Cherchons la valeur de la dérivée en un tel point. Donnons à x un accroissement h positif ou négatif ; y étant plus grand que la valeur $y+k$ qui correspond à $x+h$, l'accroissement k est négatif. Donc, pour h positif, $\frac{k}{h}$ est négatif ; pour h négatif, le dénominateur ayant changé de signe, ce même rapport est positif. Si, ce que nous supposerons, la dérivée en N existe, c'est-à-dire s'il y a une tangente et une seule à la courbe Γ, on en déduit que cette dérivée, limite commune de deux rapports $\frac{k}{h}$ de signes contraires, est forcément nulle. Ce résultat est d'ailleurs évident, géométriquement, puisque, en N, la tangente est parallèle à Ox, et par suite a un coefficient angulaire nul.

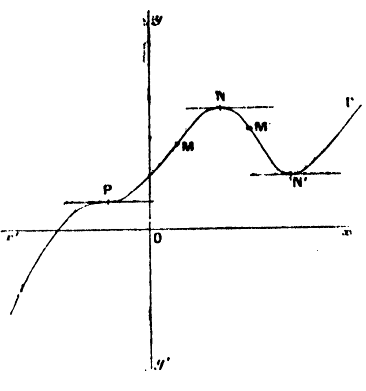


Fig. 31

Une fonction est dite *minimum* pour une valeur x de la variable, lorsque la valeur correspondante y est plus petite que toutes les valeurs voisines. C'est ce qui a lieu au point N' (*fig.* 31). On démontre comme ci-dessus qu'en ce point y' est nul. Donc : *pour toute valeur de x rendant la fonction maximum ou minimum, la dérivée est nulle.* La réciproque n'est pas toujours vraie, car il pourrait arriver que l'on eût un point tel que P (*fig.* 31) pour lequel la tangente, qui d'ailleurs traverse la courbe, est horizontale et par suite la dérivée nulle, sans que l'on ait un maximum ou un minimum.

158. — Il résulte de ce qui précède que, pour étudier les variations d'une fonction, ou, ce qui revient au même, pour en

construire la courbe représentative, on peut procéder comme il suit. On cherche si la fonction est continue pour toutes les valeurs de x. Si elle est continue quand x va d'une certaine valeur a à une valeur b, ou comme l'on dit *dans l'intervalle* a, b, on cherche la dérivée $y' = f'(x)$ de la fonction, et l'on étudie son signe dans cet intervalle. Quand la dérivée est positive, la fonction croît ; quand la dérivée est négative, la fonction décroît ; quand la dérivée est nulle, la fonction presente un maximum, ou un minimum, ou tout au moins un point où la tangente est horizontale. Il est d'ailleurs facile en pratique de distinguer ces divers cas.

La dérivée étant le coefficient angulaire de la tangente (**154**), on voit en outre que, si la dérivée est très grande en valeur absolue, la fonction croît ou décroît très vite ; si elle est très petite, la fonction croît ou décroît très lentement.

159. Variations du trinome du second degré. — En plus des diverses applications que le lecteur trouvera plus loin (**166**, **167**, **241**), nous allons montrer comment l'emploi des dérivées permet d'étudier de façon simple les variations du trinome du second degré : $y = ax^2 + bx + c$ (**113**).

La dérivée d'une telle fonction est, comme nous l'avons dit (**155**), $y' = 2ax + b = 2a\left(x + \frac{b}{2a}\right)$. Son signe dépend d'une part du signe de a, d'autre part de la grandeur relative de $-\frac{b}{2a}$ et de x. Supposons pour fixer les idées a positif. La dérivée est alors positive pour $x > -\frac{b}{2a}$, nulle pour $x = -\frac{b}{2a}$, et négative pour $x < -\frac{b}{2a}$.

La valeur prise par y pour $x = -\frac{b}{2a}$ est :

$$y = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Suivant le signe de $b^2 - 4ac$, cette ordonnée est positive ou négative ; elle est nulle pour $b^2 - 4ac = 0$.

Enfin remarquons que, si x devient de plus en plus grand en valeur absolue, y devient de plus en plus grand et positif. Ces résultats permettent de dresser le *tableau de variations* qui suit :

x	$-\infty$	croît	$-\frac{b}{2a}$	croît	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	décroît	min : $\frac{4ac-b^2}{4a}$	croît	$+\infty$

Ce tableau s'explique de lui-même. Les signes marqués sur la ligne de la dérivée, permettent de savoir immédiatement si la fonction y croît ou décroît. Quand aux signes $+\infty$, $-\infty$ (∞ s'énonce *infini*) ils servent simplement à noter de façon commode que x ou y prend des valeurs très grandes, et positives ou négatives suivant le signe extérieur.

Si le coefficient a de x^2 était négatif, on aurait une variation de tous points comparable aux précédentes, mais y croîtrait d'abord jusqu'à la valeur $\frac{4ac-b^2}{4a}$ pour décroître ensuite.

160. — L'allure générale de la courbe représentative se déduit aisément de ce qui précède. Elle a ses branches infinies tournées vers le haut ou vers le bas suivant le signe de a.

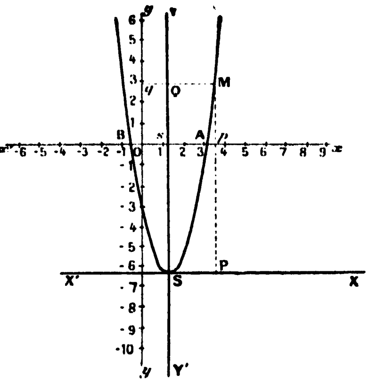


Fig. 32

Le tracé (*fig.* 32) a été fait en supposant $a = 2$; $b = -5,2$; $c = -3,1$. Le point S qui est le point le plus bas a comme coordonnées $\overline{Os} = -\frac{b}{2a} = 1,3$ et $\overline{sS} = \frac{4ac-b^2}{4a} = -6,48$. Il y a ici deux valeurs de x : $\overline{OA} = 3,1$ et $\overline{OB} = -0,5$ pour lesquelles y est nul, ce qui revient à dire que l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ a deux racines. Il n'en serait

plus de même si S était au-dessus de Ox, c'est-à-dire si $b^2 - 4ac$ était négatif. Enfin, on voit que y prend des valeurs positives pour toute valeur de x inférieure à $\overline{OB} = \beta$ ou supérieure à $\overline{OA} = \alpha$, et des valeurs négatives pour toute valeur de x comprise dans l'intervalle de α à β. Tous ces résultats ont déjà été obtenus par une autre méthode (**113**).

Nous allons montrer qu'une telle courbe est une *parabole* (**146**). Si l'on prend comme axes de coordonnées SX et SY, parallèles à Ox et Oy menées par S, un point M de la courbe d'abscisse $x = \overline{Op}$ et d'ordonnée : $y = \overline{Oq}$ a comme nouvelles coordonnées $X = \overline{SP}$ et $Y = \overline{SQ}$. Cherchons la relation qui lie X à Y quand M décrit la courbe.

On a dans tous les cas de figure (**240**) :

$$\overline{Op} = \overline{Os} + \overline{sp} = \overline{Os} + \overline{SP}$$

ou :

$$x = -\frac{b}{2a} + X$$

et de même :

$$\overline{Oq} = \overline{pM} = \overline{pP} + \overline{PM} = \overline{sS} + \overline{PM}$$

ou :

$$y = \frac{4ac - b^2}{4a} + Y.$$

Portons ces valeurs dans la relation $y = ax^2 + bx + c$, qui lie les anciennes coordonnées de M, elle devient :

$$\frac{4ac - b^2}{4a} + Y = a\left(-\frac{b}{2a} + X\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a} + X\right) + c$$

ou après simplifications :

$$Y = aX^2$$

ici $Y = 2X^2$, ce qui est bien l'équation d'une parabole de sommet S (**146**).

Exercices. — N°s 108, 109, 199, 200, 201, 202, 203, 204, 205, 206, 207, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219, 220, 221, 222, 223, 224, 225, 226, 227, 228, 229, 230, 374, 376.

TRIGONOMÉTRIE

---

161. But de la Trigonométrie. — L'Algèbre s'occupe plus spécialement des propriétés des nombres et la Géométrie de celles des figures ; mais il y a entre ces deux sciences de nombreux points de rapprochement. C'est ainsi que la Géométrie Analytique (**142** et suivants) en particulier apporte au secours de l'Algèbre la notion de représentation graphique. Par contre l'Algèbre permet de substituer à l'étude d'une courbe celle de son équation. Mais, de façon plus élémentaire, le calcul s'introduit déjà en Géométrie par le seul fait qu'on mesure des longueurs et nous en verrons de nombreux exemples (**240** et suivants). Il est commode, dans le même ordre d'idées, de pouvoir mesurer les angles et de faire des calculs sur les nombres ainsi obtenus, car les distances et les angles sont les plus simples des éléments mesurables d'une figure.

Pour prendre un exemple précis, supposons que nous connaissions deux côtés d'un triangle et l'angle compris. Le triangle est parfaitement connu. Nous pouvons le construire (**286**). Mais, si nous mesurons sur la figure la longueur du troisième côté, la précision de cette mesure n'est pas indéfinie et dépend essentiellement du tracé. Même si les côtés et l'angle donnés sont connus avec une très grande précision, il nous est impossible de dépasser une certaine approximation pour le résultat demandé.

Le *but de la Trigonométrie* est précisément de résoudre de pareils problèmes et de déterminer par le calcul, avec une précision aussi grande que l'on veut, les éléments inconnus, angles

ou distances, d'une figure pour laquelle on a déjà un nombre suffisant d'éléments connus.

162. Mesure des angles. — Il est indispensable de pouvoir faire correspondre à chaque angle xOy (*fig.* 33) un nombre qui permette de le retrouver avec certitude. Les procédés que l'on peut employer sont très nombreux ; nous allons passer les principaux en revue.

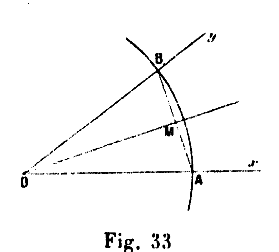


Fig. 33

L'idée la plus simple est celle qui consiste à tracer un cercle de centre O et à mesurer l'arc AB [1], par comparaison avec un arc pris comme unité. Cette unité peut d'ailleurs être l'angle droit, le *degré* (1°) ou le *grade* (1^γ) (**189**, **234**). On trouve ici : $\frac{2}{5}$ d'angle droit $= 36^\circ = 40^\gamma$.

On peut encore mesurer l'arc AB avec une unité de longueur quelconque, mais, pour éviter que cette mesure ne dépende du choix de cette unité, on prend le rayon OA comme unité de longueur. On dit alors que l'angle est mesuré en *radians*. On trouve ici 0,6283. Remarquons qu'un angle droit vaut 90°, ou 100^γ ou $\frac{\pi}{2}$ radians. Ce dernier nombre résulte de ce que la longueur d'une circonférence de rayon 1 est 2π (**262**).

Le passage de l'un quelconque de ces nombres aux autres se fait de façon simple à l'aide des tableaux que nous donnons à la fin du volume, tableaux dont l'usage est immédiat.

On pourrait enfin, comme on le fait quelquefois, mesurer la longueur de la corde AB et dresser ce que l'on appelle une *table de cordes*, mais ce procédé se ramène au fond à l'un de ceux qui nous restent à étudier.

163. — On peut songer, pour mesurer un angle, à construire

---

(1) Nous supposons connues les principales propriétés des arcs de cercle, des triangles, etc..., propriétés qui seront étudiées en Géométrie.

un triangle simple, isocèle ou rectangle (**197**) dont xOy soit un angle et à mesurer les côtés de ce triangle. Si l'on porte sur Ox et Oy des longueurs égales OA et OB pour former un triangle AOB isocèle (*fig.* 33), la mesure du côté AB revient à la mesure d'une corde du cercle de centre O de rayon OA.

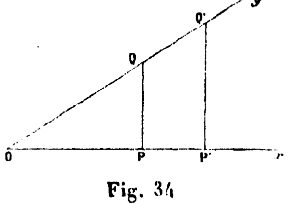


Fig. 34

On a des résultats notablement différents si l'on construit un triangle rectangle tel que OPQ (*fig.* 34). Si l'on connaît deux côtés d'un tel triangle, le troisième s'en déduit par le théorème de Pythagore (**251**) et l'angle xOy sera complètement déterminé. Deux perpendiculaires telles que PQ et P'Q' donnent des triangles OPQ, OP'Q' qui sont semblables (**248**). Aussi suffit-il de connaître le rapport de deux côtés d'un tel triangle pour qu'on puisse le construire. Ces divers rapports ont reçu des noms différents. C'est ainsi que $\frac{PQ}{OQ}$ s'appelle le *sinus* de l'angle xOy; $\frac{OP}{OQ}$ le *cosinus* et $\frac{PQ}{OP}$ la *tangente*, ce que l'on écrit :

$$\sin xOy = \frac{PQ}{OQ} \qquad \cos xOy = \frac{OP}{OQ} \qquad \operatorname{tg} xOy = \frac{PQ}{OP}.$$

Le sinus, le cosinus et la tangente d'un angle sont appelés des *lignes trigonométriques* de cet angle. Il faut bien remarquer que *les lignes trigonométriques d'un angle sont des rapports et non des longueurs*, quoiqu'en pratique on suppose, comme nous le verrons, le dénominateur égal à 1.

Remarquons que les déterminations d'un angle par son sinus ou par la corde de l'arc AB (*fig.* 33) qu'il détache sur une circonférence sont analogues, car la demi-corde MB est, comme on le voit, le sinus du demi-angle MOB, si l'on suppose le rayon égal à 1.

164. Lignes trigonométriques. — Nous allons reprendre ces notions pour les préciser; mais, pour leur donner plus de

généralité, nous allons d'abord étendre les notions d'angles et d'arcs.

Traçons (*fig.* 35) un *cercle trigonométrique*, c'est-à-dire un cercle de rayon 1. *Nous conviendrons de compter positivement tout arc de ce cercle parcouru dans le sens de la flèche, et négativement tout arc parcouru en sens contraire* (**65**). Le sens positif est le sens inverse de celui dans lequel tournent les aiguilles d'une montre.

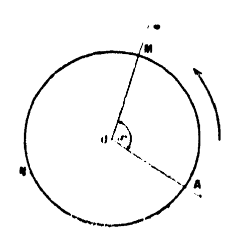


Fig. 35

C'est ainsi que l'arc AM est positif, tandis que l'arc MA est négatif. De même *l'angle de* OA *avec* OM, *c'est-à-dire l'angle dont doit tourner* OA *pour s'appliquer sur* OM, est positif et l'angle de OM avec OA est négatif.

Mais on peut aller de A à M de bien des façons. On peut, par exemple, partir de A et faire 5 fois le tour de la circonférence, ce qui nous ramène en A, puis décrire ensuite l'arc AM. On peut encore aller de A en M en tournant dans le sens négatif, etc.. *Il y a une infinité d'arcs d'origine* A *et d'extrémité* M *et par suite une infinité d'angles de côté origine* OA *et de côté extrémité* OM.

Qu'ils soient positifs ou négatifs, tous ces arcs peuvent se déduire les uns des autres par addition ou soustraction d'un certain nombre d'arcs égaux à une circonférence ; c'est ainsi que l'arc ANM est égal à la somme de l'arc négatif ANMA et de l'arc positif AM. Si l'on mesure AM en radians, ce qui donne une certaine valeur x, la circonférence ayant d'ailleurs comme valeur 2π (**162**), on voit que tous ces arcs, ou tous ces angles, sont compris dans la formule $x + 2k\pi$, le nombre k étant un entier positif, négatif ou nul.

165. — Prenons deux diamètres $x'Ox$, $y'Oy$ (*fig.* 36) et supposons que l'on fixe sur ces deux diamètres des sens positifs Ox et Oy (**66**), tels que l'on puisse passer de Ox à Oy par une rotation de $+\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire par une rotation d'un angle droit dans le sens positif.

AM étant un arc d'origine A, abaissons la perpendiculaire MP sur Ox. On appelle *sinus* d'un arc AM ou de l'angle AOM le nombre positif ou négatif qui mesure le segment $\overline{PM}$, le sens positif pour un tel segment étant celui de Oy. Le *cosinus* du même angle est le nombre qui mesure le segment $\overline{OP}$; la *tangente*, le nombre qui mesure le segment $\overline{AT}$ intercepté par les côtés de l'angle AOM sur la tangente en A au cercle (**289**). On voit que ce sont là simplement des généralisations des définitions déjà données (**163**).

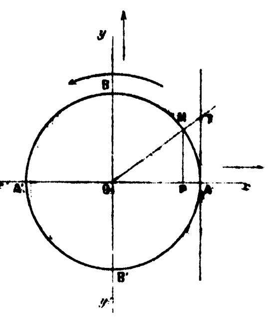


Fig. 36

Tous les arcs d'origine A et d'extrémité M ont, d'après ce qui précède, les mêmes lignes trigonométriques, ce que l'on peut écrire :

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x$$
$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x$$
$$\operatorname{tg}(x + 2k\pi) = \operatorname{tg} x.$$

Il existe deux relations très importantes entre les trois lignes d'un même arc; la première se déduit du théorème de Pythagore qui, appliqué au triangle OPM, nous donne immédiatement (**251**) :

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

La deuxième s'obtient en remarquant que les triangles OPM et OAT sont semblables, d'où l'on déduit :

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

relation exacte dans tous les cas de figure. Bien qu'elle soit beaucoup moins importante, citons encore la formule suivante qui peut se déduire des précédentes : $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$.

Il résulte en particulier de ces deux formules fondamentales :

$$\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \\ \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x} \end{cases}$$

que l'on peut calculer les diverses lignes d'un arc, connaissant l'une quelconque d'entre elles.

On appelle parfois *cotangente* l'inverse de la tangente :

$$\text{cotg}\, x = \frac{1}{\text{tg}\, x} = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

166. Variations des lignes trigonométriques. — Les variations du sinus d'un angle, qui croît ou qui décroît constamment à partir de zéro, résultent de la définition même du sinus et sont résumées dans le tableau suivant :

x	o	croît	$\frac{\pi}{2}$	croît	π	croît	$\frac{3\pi}{2}$	croît	2π
$\sin x$	o	croît	1	décroît	o	décroît	— 1	croît	o

Si l'arc continue à croître et devient plus grand qu'une circonférence, on retrouve les mêmes valeurs de 2π à 4π, puis de 4π à 6π, ... ; ou encore de -2π à o ; de -4π à -2π, ... C'est ce que l'on traduit en disant que la fonction $y = \sin x$ est une *fonction périodique de période* 2π.

La valeur maximum 1 du sinus a lieu quand M est en B, pour x égal à $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$; le minimum — 1 en B', pour $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$.

Le graphique ci-contre (*fig.* 37) donne les variations de cette fonction $y = \sin x$ et ne fait que traduire les résultats du tableau

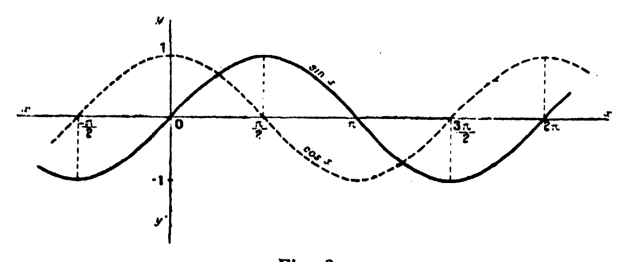


Fig. 37

précédent. Il est essentiel de remarquer que ce tracé dépend du choix de l'unité d'angle ; on prend ordinairement le radian omme unité et la courbe obtenue s'appelle alors une *sinussoïde*.

Nous verrons (**178**) qu'avec cette même hypothèse sur le choix de l'unité d'angle la dérivée de y est $y' = \cos x$.

Les variations du cosinus sont analogues à celles du sinus. Aux points A, B, A', B', correspondent des arcs dont le cosinus prend les valeurs : 1, 0, — 1, 0. Le maximum et le minimum ont donc les mêmes valeurs pour $\cos x$ et $\sin x$. Quant au graphique des variations de $\cos x$ (*fig.* 37) il se déduit de la sinussoïde déjà construite par une translation (**213**), ce que l'on pourrait établir en se servant de la formule $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ (**171**).

167. — Les variations de la fonction $y = \operatorname{tg} x$ sont un peu plus compliquées à étudier. Quand l'arc AM croît de 0 à $\frac{\pi}{2} = 1{,}57079$ .., la tangente $\overline{\text{AT}}$ croît indéfiniment. C'est ainsi que pour $\alpha = 1$ on a $\operatorname{tg}\alpha = 1{,}56$; pour $\alpha = 1{,}5$ on a $\operatorname{tg}\alpha = 14{,}1$; pour $\alpha = 1{,}57$ on a $\operatorname{tg}\alpha = 1260$ environ ; etc... Mais dès que le point M a dépassé B, la tangente est négative tout en restant très grande en valeur absolue. La fonction $y = \operatorname{tg} x$ est discontinue pour $x = \frac{\pi}{2}$.(**152**). On dit parfois qu'elle passe de $-\infty$ à $+\infty$. Quand M va de B en A', la tangente décroît et devient nulle en A'. On a le tableau suivant des variations :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\operatorname{tg} x$	0	croît	$-\infty$ | $+\infty$	croît	0	croît	$+\infty$ | $-\infty$	croît	0

La fonction est périodique avec comme période π et non plus 2π. Le graphique correspondant à ces variations est formé (*fig.* 36) de branches distinctes comprises dans les divers intervalles de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$, de $\frac{\pi}{2}$ à $\frac{3\pi}{2}$, de $\frac{3\pi}{2}$ à $\frac{5\pi}{2}$,... La fonction croît constamment dans chaque intervalle. D'ailleurs nous verrons que la dérivée de $y = \operatorname{tg} x$ est $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$ (**178**), dérivée qui est toujours positive.

Les variations de la cotangente donneraient lieu à une étude et à un graphique analogues.

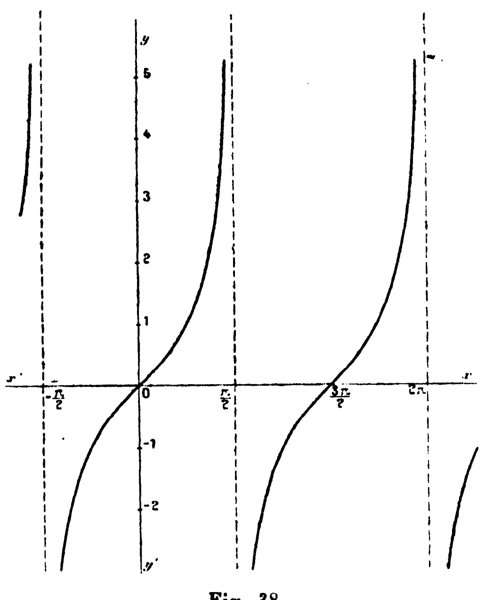


Fig. 38

168. Relations entre les lignes trigonométriques de divers arcs. — Si l'on remplace un point M par l'un quelconque de ses symétriques $M'M''M'''$ par rapport aux axes (*fig.* 39), les lignes trigonométriques de ces divers points ont la même valeur absolue, mais non les mêmes signes. En étudiant en détail les divers cas qui se présentent, on établit sans peine les diverses formules :

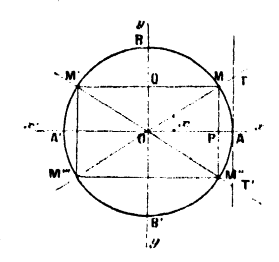


Fig. 39

$$\sin(\pi - x) = \sin x \qquad \sin(-x) = -\sin x \qquad \sin(\pi + x) = -\sin x$$
$$\cos(\pi - x) = -\cos x \qquad \cos(-x) = \cos x \qquad \cos(\pi + x) = -\cos x$$
$$\text{tg}(\pi + x) = -\text{tg}\, x \qquad \text{tg}(-x) = -\text{tg}\, x \qquad \text{tg}(\pi + x) = \text{tg}\, x$$

La cotangente donnerait des formules analogues à celles de la tangente.

Trois seulement de ces formules ne contiennent pas de signe extérieur. La première :

$$\sin(\pi - x) = \sin x$$

montre en particulier que *deux angles supplémentaires ont le même sinus* : sin AOM = sin AOM′ ; la deuxième :

$$\cos(-x) = \cos x$$

prouve que *le cosinus de deux directions* OA *et* OM *ne dépend pas de l'ordre dans lequel on les prend* : cos AOM = cos MOA ; enfin on déduit de la troisième :

$$\text{tg}(\pi + x) = \text{tg}\, x$$

que *la tangente de l'angle que fait une droite avec un axe* Ox *ne dépend pas du sens positif pris sur cette droite* : tg AOM = tg AOM‴ ; c'est ce qui nous a permis (**145**) de définir le coefficient angulaire d'une droite.

169. — Inversement, il résulte de ceci qu'un arc n'est pas complètement déterminé par la connaissance de l'une de ses extrémités ou de l'une de ses lignes trigonométriques. Si par exemple on se donne le sinus d'un arc $\overline{OQ}$ (*fig.* 39), on voit que son extrémité peut se trouver soit en M soit en M′, pourvu que $\overline{OQ}$ soit compris entre — 1 et + 1. A chacune de ces extrémités correspond d'ailleurs une infinité d'arcs qui sont donnés par les formules suivantes, dans lesquelles x désigne l'un quelconque d'entre eux :

$$2k\pi + x \quad \text{et} \quad 2k\pi + (\pi - x) = (2k + 1)\pi - x.$$

De façon analogue, pour tout arc de cosinus $\overline{OP}$ compris entre — 1 et + 1, on a deux extrémités M et M″ et les arcs correspondants sont donnés par les formules :

$$2k\pi + x \quad \text{et} \quad 2k\pi - x$$

ou si l'on veut :

$$2k\pi \pm x$$

Si l'on se donne la tangente AT, on a encore deux extrémités M et M''' et deux formules :

$$2k\pi + x \quad \text{et} \quad 2k\pi + (\pi + x) = (2k + 1)\pi + x$$

ou encore :

$$k\pi + x$$

k étant un entier quelconque. pair ou impair. Les résultats sont exactement les mêmes pour la cotangente.

170. Tables trigonométriques. — La table des valeurs numériques des lignes trigonométriques de l'arc x, quand cet arc varie, s'appelle *table de lignes naturelles*, par opposition avec les *tables logarithmiques* donnant les valeurs des *logarithmes* de ces mêmes lignes. Le lecteur trouvera de telles tables à la fin du volume.

Dans un cas comme dans l'autre, une table sera complète si l'on donne à l'arc x des valeurs comprises entre o et 2π, puisque nous avons vu que le sinus, le cosinus, la tangente, et son inverse la cotangente sont périodiques et de période 2π ou même π. Nous allons voir que l'on peut considérablement restreindre cet intervalle de variation.

Prenons par exemple le sinus. La formule : $\sin(\pi - x) = -\sin x$ permet de se ramener au cas où l'arc est compris entre o et π. La formule : $\sin(\pi - x) = \sin x$ montre qu'il suffit même d'avoir des arcs compris entre o et $\frac{\pi}{2}$. On ferait des raisonnements analogues pour les autres lignes trigonométriques. Cherchons par exemple la tangente de l'angle -3743^{γ}. On a, en remarquant que 400^{γ} correspond à 2π :

$$\begin{aligned} \text{tg}(-3743^{\gamma}) &= \text{tg}(-9.400^{\gamma} - 143^{\gamma}) = \text{tg}(-143^{\gamma}) \\ &= -\text{tg}\,143^{\gamma} = +\text{tg}(200^{\gamma} - 143^{\gamma}) = \text{tg}\,57^{\gamma}. \end{aligned}$$

Il suffit donc d'avoir une table allant de o à 100^{γ}, ou si l'on veut de o à $\frac{\pi}{2}$.

171. — Nous allons encore réduire cette table de moitié. Les formules que nous établirons résultent immédiatement des propriétés des triangles rectangles (**163**) dans le cas d'angles aigus; mais pour plus de généralité nous allons supposer qu'il s'agisse d'arcs quelconques.

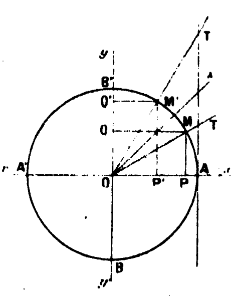


Fig. 40

Prenons sur le cercle trigonométrique (*fig.* 40) deux arcs AM et AM′ qui soient *complémentaires*, c'est-à-dire dont la somme soit égale à $\frac{\pi}{2}$, ou, de façon plus précise, tels que leurs extrémités soient symétriques par rapport à la bissectrice Oz de l'angle xOy. Si x est l'un des arcs terminés en M, tout arc terminé en M′ a comme valeur $2k\pi + \frac{\pi}{2} - x$. Mais pour ce qui suit, il suffit de se borner à $\frac{\pi}{2} - x$.

Les rectangles MPOQ et M′P′OQ′ sont symétriques par rapport à Oz, donc $\overline{OQ} = \overline{PM} = \sin AOM$ est égal à $\overline{OP'} = \cos AOM'$, et de même $\overline{OP} = \cos AOM$ est égal à $\overline{OQ'} = \overline{P'M'} = \sin AOM'$, ce que l'on peut écrire :

$$\left\{\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos x \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \sin x. \end{aligned}\right.$$

Quant aux tangentes de ces deux angles $\overline{AT}$ et $\overline{AT'}$, remarquons que les triangles rectangles AOT et AOT′ sont semblables, les angles AT′O et AOT ayant le même complément AOT′; on a donc $\frac{\overline{AT}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{AT'}}$, ou $\overline{AT}.\overline{AT'} = 1$, ce qui donne :

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \operatorname{cotg} x$$

On aurait de même : $\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{tg} x.$

On voit que *le cosinus d'un angle est le sinus de l'angle complémentaire, et la cotangente d'un angle la tangente de l'angle complémentaire*, ce que rappellent d'ailleurs les mots « co-sinus » et « co-tangente ».

172. — Si donc on a dressé la table des valeurs du sinus pour des arcs allant de 0° à 90° ou de 0^γ à 100^γ, il sera inutile de dresser la table des valeurs du cosinus dans cet intervalle; de même la table des tangentes dispensera de celle des cotangentes.

On adopte le plus souvent la disposition pratique que le lecteur trouvera à la fin du volume. La table va de 0° à 45° ou de 0^γ à 50^γ, avec dans quatre colonnes distinctes les valeurs du sinus, de la tangente, de la cotangente et du cosinus; en lisant de bas en haut on trouve les valeurs des lignes trigonométriques des arcs de 45° à 90°, ou de 50^γ à 100^γ.

C'est ainsi que la ligne marquée 43^γ donne en lisant de haut en bas :

$$\sin 43^\gamma = 0,62 \quad \mathrm{tg}\, 43^\gamma = 0,80 \quad \mathrm{cotg}\, 43^\gamma = 1,25 \quad \cos 43^\gamma = 0,78$$

et en lisant de bas en haut :

$$\cos 57^\gamma = 0,62 \quad \mathrm{cotg}\, 57^\gamma = 0,80 \quad \mathrm{tg}\, 57^\gamma = 1,25 \quad \sin 57^\gamma = 0,78.$$

Nous avons déjà vu que tout arc peut être ramené à être compris entre O et π ; d'ailleurs le lecteur trouvera, à côté de ces tables, un petit tableau permettant d'obtenir immédiatement ce résultat; c'est ainsi que l'exemple déjà traité donne ici :
$\mathrm{tg}\,(-3743^\gamma) = \mathrm{tg}\,(-38.100^\gamma + 57^\gamma) = \mathrm{tg}\, 57^\gamma = 1,25$
car : $-38 = -40 + 3 =$ multiple de $4 + 3$.

Les nombres des divers tableaux ont été obtenus à l'aide de méthodes dont nous ne parlerons pas ici.

Bornons-nous à faire remarquer que certains arcs remarquables compris entre o et $\frac{\pi}{2}$ donnent des lignes trigonométriques faciles à calculer. C'est ainsi que le lecteur pourra dé-

duire des propriétés du carré, de l'hexagone régulier et du triangle équilatéral (**259**) les résultats suivants :

$\frac{\pi}{4}$ ou 45° ou 50^γ	$\frac{\pi}{6}$ ou 30° ou $33^\gamma\frac{1}{3}$	$\frac{\pi}{3}$ ou 60° ou $66^\gamma\frac{2}{3}$
$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$	$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$	$\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

En particulier, il faut remarquer que l'on a $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$ et $\cos\frac{\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

173. Formules d'additions des arcs. — Nous allons établir la formule :

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

qui donne le cosinus de la somme de deux arcs x et y connaissant les lignes de ces arcs. C'est l'une des formules les plus importantes de toute la Trigonométrie.

Prenons un arc x quelconque (*fig.* 41) d'origine A et d'extrémité M. On a $\cos x = \overline{OC}$ et $\sin x = \overline{CM}$. Prenons maintenant deux nouveaux axes rectangulaires Ox_1, Oy_1 faisant entre eux l'angle $+\frac{\pi}{2}$ et tels que le sens positif de Ox_1 coïncide avec $\overline{OM}$.

Fig. 41

Le point M sert de nouvelle origine pour l'arc y d'extrémité P, de sorte que $\cos y = \overline{OD}$ et $\sin y = \overline{DP} = \overline{OE}$, en désignant

par E la projection (**195**) de P sur Oy_1. On voit enfin que l'arc $x + y$ compté avec A comme origine a son extrémité en P et que par suite :

$$\overline{OF} = \cos(x + y).$$

Pour calculer ce segment $\overline{OF}$ projetons D en G sur Ox. Quelle que soit la disposition des trois points O, G, F sur Ox, on sait que $\overline{OG} + \overline{GF} + \overline{FO} = 0$ (**240**), que nous écrirons ici $\overline{OF} = \overline{OG} + \overline{GF}$. Évaluons les divers termes de cette somme. Les triangles semblables OGD et OCM donnent en grandeur et en signe : $\frac{\overline{OG}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{OM}}$ ou $\frac{\overline{OG}}{\cos x} = \frac{\cos y}{+1}$. Donc :

$$\overline{OG} = \cos x \cos y.$$

Pour calculer $\overline{GF}$, remarquons que les deux segments $\overline{DP}$ et $\overline{OE}$, qui sont égaux, parallèles, et de même sens, ont des projections égales et de même sens : $\overline{GF} = \overline{OH}$ (**216**). D'autre part, projetons N en I sur Ox, on a en grandeur et signe : $\frac{\overline{OH}}{\overline{OI}} = \frac{\overline{OE}}{\overline{ON}}$. L'angle AON est égal à AOM + MON soit $x + \frac{\pi}{2}$ et l'on a $\frac{\overline{OH}}{\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\sin y}{+1}$, ou $\overline{OH} = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \sin y$. Mais : $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (-x)\right) = \sin(-x) = -\sin x$, et en définitive :

$$\overline{GF} = \overline{OH} = -\sin x \sin y.$$

La relation $\overline{OF} = \overline{OG} + \overline{GF}$ peut maintenant s'écrire :

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

ce qui est bien la formule à établir.

174. — Remplaçons dans cette formule y par $-y$, en remarquant que $\cos(-y) = \cos y$ et $\sin(-y) = -\sin y$;

elle devient :

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

Si maintenant on remplace x par $\frac{\pi}{2} - x$, on a $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x - y\right) = \sin(x + y)$; $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$, d'où :

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

et enfin en remplaçant dans cette dernière formule y par $-y$:

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

On obtient ainsi les quatre formules fondamentales :

$$\left\{\begin{array}{l} \cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y \\ \sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \\ \sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y \end{array}\right.$$

qui donnent les lignes des arcs $x \pm y$, connaissant celles des arcs x et y. On en déduit d'ailleurs :

$$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\sin(x + y)}{\cos(x + y)} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y}$$

$$= \frac{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y}}{1 - \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\sin y}{\cos y}} = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

et de façon analogue :

$$\operatorname{tg}(x - y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}.$$

Les formules analogues que l'on pourrait établir pour la cotangente servent très rarement.

175. — Ces formules d'addition ou de soustraction des arcs sont d'un usage continuel en trigonométrie. En plus des applications que nous aurons à faire dans la suite, nous allons en déduire immédiatement quelques identités souvent utiles.

Les formules donnant cos $(x + y)$ et cos $(x - y)$ peuvent s'écrire par addition et soustraction :

$$\begin{cases} 2 \cos x \cos y = \cos(x + y) + \cos(x - y) \\ 2 \sin x \sin y = \cos(x - y) - \cos(x + y). \end{cases}$$

De même avec sin $(x + y)$ et sin $(x - y)$:

$$\begin{cases} 2 \sin x \cos y = \sin(x + y) + \sin(x - y) \\ 2 \cos x \sin y = \sin(x + y) - \sin(x - y). \end{cases}$$

Ces deux dernières sont au fond identiques, car elles se déduisent l'une de l'autre par échange de x et de y.

Ces formules permettent de transformer comme on le voit un produit de sinus ou de cosinus en somme ou différence, mais c'est surtout la transformation inverse qui sert le plus fréquemment, car elle permet des calculs par logarithmes ; aussi écrit-on ces formules sous une forme un peu différente en posant $x + y = p$ et $x - y = q$, ce qui revient à prendre $x = \frac{p+q}{2}$, $y = \frac{p-q}{2}$:

$$\begin{cases} \cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \\ \cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2} \\ \sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \\ \sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2} \end{cases}$$

Ces divers groupes de formules sont connus sous le nom de *formules de transformation*. Nous aurons à les utiliser plus loin (**178**, **183**).

176. Multiplication et division des arcs. — Si dans les formules donnant cos $(x + y)$, sin $(x + y)$, tg $(x + y)$, on suppose $x = y$, on a pour les lignes de l'arc $2x$ en fonction de

celles de l'arc x :

$$\begin{cases} \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \\ \sin 2x = 2 \sin x \cos x \\ \operatorname{tg} 2x = \dfrac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \end{cases}$$

La première peut d'ailleurs s'écrire en tenant compte de l'identité $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$:

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x.$$

Si nous supposons maintenant que l'on remplace $2x$ par x, on a les diverses formules :

$$\begin{cases} \cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1 = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} \\ \sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \\ \operatorname{tg} x = \dfrac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \end{cases}$$

On en déduit en particulier que *toutes les lignes trigonométriques d'un arc s'expriment rationnellement en fonction de la tangente de l'arc moitié*. La dernière de ces formules donne en effet $\operatorname{tg} x$ en fonction de $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$; pour $\cos x$, on a successivement :

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}.$$

Quant à $\sin x$, il se déduit des résultats précédents en remarquant que $\sin x = \operatorname{tg} x \cos x$ (**165**). En posant pour abréger $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, on a ainsi :

$$\begin{cases} \sin x = \dfrac{2t}{1 + t^2} \\ \cos x = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2} \\ \operatorname{tg} x = \dfrac{2t}{1 - t^2}. \end{cases}$$

177. — Le problème de la division d'un arc en deux parties égales est inverse du précédent. Il consiste à trouver les lignes de l'arc $\frac{x}{2}$ connaissant celles de l'arc x. Habituellement, on se donne une seulement des lignes de l'arc x. Traitons par exemple le cas où l'on se donne le cosinus de l'arc x : $\text{OP} = \cos x$ (*fig.* 42). Il y a, comme on le sait, deux extrémités possibles M et M′ pour les arcs d'origine A ayant OP comme cosinus. Prenons d'abord les arcs AM. Au point de vue qui nous occupe, ces arcs sont de deux catégories suivant qu'on les forme en ajoutant, ou en retranchant, à l'arc ANM, de milieu N, un nombre pair ou impair de circonférences. Dans le premier cas, il faut ajouter à AN un nombre entier de circonférences, ce qui donne toujours N comme extrémité; dans le second cas, il faut ajouter un nombre entier de circonférences plus une demi-circonférence, ce qui donne N_1 diamétralement opposé à N. On peut dire en quelque sorte que *les arcs* AM *ont deux milieux* N *et* N_1. Un raisonnement analogue montre que les arcs AM′ ont deux milieux N′ et N'_1.

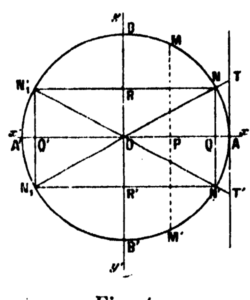


Fig. 42

Si donc on se donne $\cos x$, il résulte de la figure que l'on a pour chacune des lignes de $\frac{x}{2}$ quatre valeurs possibles; mais on voit que les valeurs de $\cos \frac{x}{2}$ se ramènent à deux $\overline{\text{OQ}}$ et $\overline{\text{OQ}'}$ égales et de signes contraires; de même pour le sinus qui donne $\overline{\text{OR}}$ et $\overline{\text{OR}'}$ et la tangente qui donne $\overline{\text{AT}}$ et $\overline{\text{AT}'}$.

On peut obtenir ces résultats par le calcul. Tous les arcs ayant comme cosinus le segment $\overline{\text{OP}}$ peuvent se déduire de l'un quelconque d'entre eux α par la formule (**169**) :

$$x = 2k\pi \pm \alpha$$

qui peut s'écrire :

$$\frac{x}{2} = k\pi + \frac{\alpha}{2}$$

Les cosinus de ces arcs sont suivant les valeurs de k :

$$\ldots \cos\left(-\pi+\frac{\alpha}{2}\right) \quad \cos\frac{\alpha}{2} \quad \cos\left(\pi+\frac{\alpha}{2}\right) \quad \cos\left(2\pi+\frac{\alpha}{2}\right)\ldots$$

$$\ldots \cos\left(-\pi-\frac{\alpha}{2}\right) \quad \cos\left(-\frac{\alpha}{2}\right) \quad \cos\left(\pi-\frac{\alpha}{2}\right) \quad \cos\left(2\pi-\frac{\alpha}{2}\right)\ldots$$

et se ramènent à deux valeurs distinctes $\cos\frac{\alpha}{2}$ et $-\cos\frac{\alpha}{2}$. Le même raisonnement donnera pour $\sin x$ deux valeurs : $\sin\frac{\alpha}{2}$ et $-\sin\frac{\alpha}{2}$, et pour $\operatorname{tg} x$: $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ et $-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

On peut d'ailleurs exprimer les lignes de l'arc $\frac{x}{2}$ en fonction de $\cos x$. Les identités $\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2}$ donnent

$$\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \qquad \sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$

d'où par division :

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}.$$

Nous laissons au lecteur le soin de traiter de façon analogue le cas où l'on se donne $\sin x$ ou $\operatorname{tg} x$, ce qui donne dans chaque cas 4 extrémités d'arcs répondant à la question. Les discussions complètes sont d'ailleurs assez délicates.

178. Dérivées des lignes trigonométriques. — Le calcul des dérivées des fonctions $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ s'appuie sur la propriété suivante :

Si un arc x, évalué en radians, tend vers o, *la limite du rapport* $\frac{\sin x}{x}$ *est* 1.

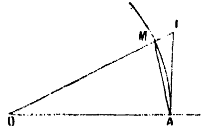


Fig. 43

Prenons un arc supposé assez petit du cercle trigonométrique AM $= x$ (*fig.* 43) et traçons la corde AM et la tangente AI. L'aire du secteur OAM est (**270**) $\frac{1}{2}x$. Elle est visiblement supérieure à celle du triangle OAM, ou (**182**)

$\frac{1}{2}\sin x$, et inférieure à celle du triangle OAI, ou $\frac{1}{2}\operatorname{tg} x$, ce que l'on peut écrire :

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x.$$

Multiplions ces diverses inégalités par 2 et divisons par $\sin x$, qui est ici positif :

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Quand x tend vers 0, $\cos x$ tend vers 1 et l'on en déduit que $\frac{x}{\sin x}$ tend vers 1. Il en est par suite de même de $\frac{\sin x}{x}$.

Cherchons maintenant la dérivée de $y = \sin x$ (**154**). Donnons à x un accroissement h d'où résulte pour y l'accroissement $k = \sin(x+h) - \sin x$; le rapport $\frac{k}{h}$ est égal à (**175**)

$$\frac{k}{h} = \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h} = \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cdot\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)$$

Le premier facteur tend vers 1 quand h et par suite $\frac{h}{2}$ tendent vers 0, le second tend vers $\cos x$; on a donc à la limite :

$$y' = \cos x.$$

On verra de même que la dérivée de $y = \cos x$ est

$$y' = -\sin x.$$

Pour $y = \operatorname{tg} x$, on a :

$$\frac{k}{h} = \frac{\operatorname{tg}(x+h) - \operatorname{tg} x}{h} = \frac{\frac{\sin(x+h)}{\cos(x+h)} - \frac{\sin x}{\cos x}}{h}$$

$$= \frac{\cos x \sin(x+h) - \sin x \cos(x+h)}{h\cos x\cos(x+h)} = \frac{\sin h}{h}\cdot\frac{1}{\cos x\cos(x+h)}$$

Quand h tend vers o, on en déduit pour la dérivée

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Rappelons une fois de plus que ces formules supposent expressément que *l'unité d'angle est le radian.*

179. Résolution des triangles rectangles. — La principale application des formules de trigonométrie est la recherche des éléments inconnus d'un triangle, ou *résolution* de ce triangle, quand on en connaît certains éléments. Le cas des triangles rectangles est particulièrement simple.

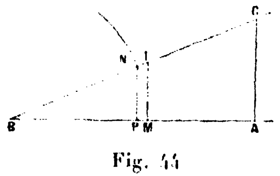


Fig. 44

Pour un tel triangle ABC (*fig.* 44), l'angle en A est droit, les angles en B et C sont aigus, donc les lignes trigonométriques de ces angles sont toujours positives et l'une de ces lignes étant connue, l'angle est lui-même déterminé sans ambiguïté (**169**).

Les angles sont désignés habituellement par A, B, C et les côtés opposés par a, b, c. On a d'ailleurs $B + C = \frac{\pi}{2}$ en radians, ou encore $B + C = 90^\circ = 100^\gamma$. Pour l'uniformité des notations nous supposerons dans tout ce qui suit les angles exprimés en grades. Il sera facile au lecteur de passer, s'il le désire, des grades aux degrés ou aux radians.

Traçons un cercle de centre B, de rayon $BM = BN = 1$, on a : $PN = \sin B$, $BP = \cos B$, $MT = \operatorname{tg} B$, ou, en remarquant que les triangles BPN, BMT, BAC sont semblables (**248**) : $\frac{AC}{BC} = \sin B$; $\frac{AB}{BC} = \cos B$; $\frac{AC}{AB} = \operatorname{tg} B$, ce que l'on peut écrire :

$$\begin{cases} b = a \sin B \\ c = a \cos B \\ b = c \operatorname{tg} B \end{cases}$$

De même pour C :

$$\begin{cases} c = a \sin C \\ b = a \cos C \\ c = b \operatorname{tg} C \end{cases}$$

La surface du triangle est donnée par $S = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} bc$ (**267**). Ce sont ces formules qui vont nous permettre de *résoudre* un triangle rectangle connaissant deux côtés, ou un côté et un angle aigu. Les solutions géométriques de ces problèmes seront données plus loin (**286**).

180. — I. Soit à résoudre un triangle rectangle pour lequel *on se donne les deux côtés de l'angle droit* : b, c. On a immédiatement :

$$\left\{\begin{aligned} \operatorname{tg} B &= \frac{b}{c} \\ C &= 100^{\gamma} - B \\ a &= \frac{b}{\sin B} \end{aligned}\right.$$

Cette dernière formule est plus avantageuse pour le calcul que celle que donne le théorème de Pythagore : $a = \sqrt{b^2 + c^2}$ (**251**). Si l'on emploie les logarithmes (**131**) en se servant des tables logarithmiques, on a les formules :

$$\log \operatorname{tg} B = \log b + \operatorname{colog} c$$
$$\log a = \log b + \operatorname{colog} \sin B.$$

On appliquerait de même le calcul logarithmique aux divers problèmes qui suivent.

II. *On se donne un côté de l'angle droit et l'hypoténuse* : b, a. On a ici :

$$\left\{\begin{aligned} \sin B &= \frac{b}{a} \\ C &= 100^{\gamma} - B \\ c &= a \cos B \end{aligned}\right.$$

La dernière formule est plus commode pour le calcul que $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Un tel triangle existe si $\sin B < 1$, ou $b < a$.

III. *On se donne un côté de l'angle droit et un angle aigu* : b, B. Remarquons que les angles aigus étant complémentaires,

il suffit d'en connaître un pour que l'autre le soit également, d'où :

$$\begin{cases} C = 100^{\gamma} - B \\ a = \dfrac{b}{\sin B} \\ c = \dfrac{b}{\operatorname{tg} B} \end{cases}$$

IV. *On se donne l'hypoténuse et un angle aigu : a,* B. On a les formules :

$$\begin{cases} C = 100^{\gamma} - B \\ b = a \sin B \\ c = a \cos B \end{cases}$$

181. Résolution des triangles quelconques. — Nous allons d'abord établir quelques relations très importantes entre les côtés $a = BC$; $b = CA$; $c = AB$ et les angles A, B, C d'un triangle ABC quelconque (*fig.* 45). Les angles satisfont à la relation remarquable (**218**) :

$$A + B + C = 200^{\gamma}$$

Si deux d'entre eux sont connus le troisième l'est également.

Ces angles étant compris entre 0^{γ} et 200^{γ} leurs sinus sont toujours positifs ; leurs cosinus ou tangentes sont positifs si l'angle est aigu, négatifs s'il est obtus. Un angle d'un triangle est par suite déterminé sans ambiguïté par son cosinus ou sa tangente, mais, si l'on donne son sinus, il y a deux angles supplémentaires l'un de l'autre qui répondent à la question (**169**).

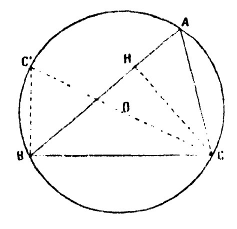


Fig. 45

Menons le diamètre $CC' = 2R$ du cercle circonscrit au triangle et remarquons que dans le triangle rectangle BCC' l'angle BC'C est égal à BAC ou A (**235**). On a : $BC = CC'.\sin A$, ou $\dfrac{a}{\sin A} = 2R$. En procédant de même pour les autres som-

mets, on a les relations très importantes qui suivent :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

la valeur commune de tous ces rapports étant d'ailleurs 2R.

Nous allons établir un nouveau groupe de relations entre les éléments d'un triangle en menant la hauteur CH et appliquant le théorème de Pythagore (**251**) aux triangles BHC et AHC, ce qui donne successivement :

$$\overline{BC}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{BH}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AH}^2 + (AB - AH)^2$$
$$= \overline{AC}^2 - \overline{AH}^2 + \overline{AB}^2 + \overline{AH}^2 - 2AB.AH = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2AB.AH$$

ou encore :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

en remarquant que $AH = AC . \cos HAC = b \cos A$. Cette relation a été établie en supposant que l'angle A est aigu ; s'il est obtus, il faut remplacer le dernier signe — par +, mais cos A est négatif et l'on est conduit au même résultat. On a donc les trois nouvelles formules :

$$\left\{ \begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{array} \right.$$

Il existe un grand nombre d'autres relations entre les éléments d'un triangle, mais nous nous bornerons à donner celles qui précèdent.

182. — On a parfois besoin de calculer la surface d'un triangle ABC (*fig.* 45) en fonction des côtés et des angles de ce triangle. Ce calcul résulte de la formule connue (**267**) : $S = \frac{1}{2} AB.CH = \frac{1}{2} AB . AC . \sin HAC$, qui peut s'écrire :

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A$$

On aurait de même

$$S = \frac{1}{2} ca \sin B = \frac{1}{2} ab \sin C$$

Il est souvent commode d'avoir S uniquement en fonction des côtés ; on remplace alors sin A par sa valeur en fonction des côtés, valeur déduite de $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos A$, qui peut s'écrire :

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

On a par suite :

$$S = \frac{1}{2}\,bc \sin A = \frac{1}{2}\,bc\sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{1}{2}\,bc\sqrt{1 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{(2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}$$

Transformons la quantité sous le radical, en remarquant que c'est une différence de carrés (**86**) ; on a successivement :

$$(2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 = (2bc + b^2 + c^2 - a^2)\,(2bc - b^2 - c^2 + a^2)$$
$$= [(b + c)^2 - a^2]\,[a^2 - (b - c)^2]$$
$$= (b + c + a)\,(b + c - a)\,(a + c - b)\,(a + b - c).$$

Si l'on désigne par p le demi-périmètre, on a :

$$2p = a + b + c \qquad 2(p - a) = b + c - a \qquad 2(p - b) = a + c - b$$
$$2(p - c) = a + b - c$$

ce qui nous conduit au résultat cherché :

$$S = \sqrt{p(p - a)\,(p - b)\,(p - c)}$$

formule remarquable donnant la surface sous forme symétrique par rapport aux trois côtés.

183. — Appliquons ces diverses formules à la résolution des triangles dans les cas les plus simples. Les mêmes problèmes seront d'ailleurs traités plus loin par la géométrie (**286**).

I. *On se donne un côté et deux angles* : a, B, C. Il suffit de se donner deux quelconques des angles : B et C pour avoir immédiatement le troisième :

$$A = 200^{\gamma} - B - C$$

On a les côtés inconnus en s'appuyant sur les rapports $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ qui donnent :

$$\begin{cases} b = \dfrac{a \sin B}{\sin A} \\ c = \dfrac{a \sin C}{\sin A} \end{cases}$$

Le triangle existe toujours pourvu que B et C aient une somme inférieure à deux angles droits.

II. *On se donne deux côtés et l'angle compris : b, c,* A. La formule $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ ne permet pas le calcul immédiat de B et C, mais donne une relation entre ces angles; d'autre part leur somme est connue $B + C = 200^{g} - A$. On calcule B et C à l'aide de ces relations en introduisant une inconnue auxiliaire qui est la différence des angles B et C. Supposons pour fixer les idées $b > c$ et par suite $B > C$; on a alors (**40**) :

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{b + c}{\sin B + \sin C} = \frac{b - c}{\sin B - \sin C}$$

que l'on peut écrire (**175**) en posant $B - C = \alpha$:

$$\frac{b-c}{b+c} = \frac{\sin B - \sin C}{\sin B + \sin C} = \frac{2 \sin \frac{B-C}{2} \cos \frac{B+C}{2}}{2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{B-C}{2}}{\operatorname{tg} \frac{B+C}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{A}{2}$$

puisque les tangentes des angles complémentaires $\frac{B + C}{2}$ et $\frac{A}{2}$ sont inverses l'une de l'autre (**171**). On a donc en définitive pour α :

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{b - c}{b + c} \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{A}{2}}.$$

L'angle $B - C = \alpha$ étant ainsi connu, ainsi d'ailleurs que $B + C$, on a immédiatement B et C et par suite a :

$$a = \frac{b \sin B}{\sin A}.$$

Nous laissons au lecteur le soin de voir qu'il y a toujours un triangle répondant aux conditions de l'énoncé.

Il est facile de s'assurer que le calcul de a par la formule $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ est plus long que celui qui précède ; de plus cette formule ne se prête pas aux calculs par logarithmes.

III. *On se donne deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux* : a, b, A. On a les formules :

$$\begin{cases} \sin B = \dfrac{b \sin A}{a} \\ C = 200^\gamma - A - B \\ c = \dfrac{a \sin C}{\sin A} = \dfrac{a \sin (A + B)}{\sin A} \end{cases}$$

La discussion est assez délicate et conduit aux résultats suivants que nous nous bornons à énoncer : si $b < a$, il y a une solution et une seule ; si $b > a$, le triangle n'existe que pour A aigu et dans ce cas il y a 2 solutions ou 1 suivant que a est supérieur ou inférieur à $b \sin A$.

IV. *On se donne les trois côtés* : a, b, c. Le calcul des angles peut se déduire des formules telles que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$; mais, bien que ce soit moins naturel, il y a avantage à procéder comme il suit :

Traçons le cercle inscrit dans le triangle ABC (*fig.* 46), cercle de centre O, au point de concours des bissectrices (**229**), et

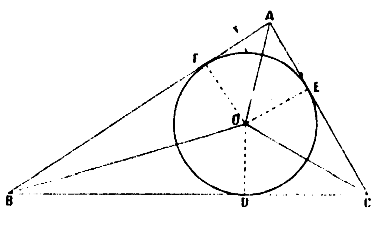


Fig. 46

de rayon OD = OE = OF = r. Ecrivons que la surface S du triangle est la somme des surfaces des trois triangles BOC, COA, AOB : $S = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = \frac{a + b + c}{2} \cdot r = pr$, en

désignant par p comme nous l'avons déjà fait le demi-périmètre (**182**). S étant connu en fonction des côtés, $r = \frac{S}{p}$ le sera également. D'autre part, le triangle rectangle AOF donne $\operatorname{tg} OAF = \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{OF}{AF} = \frac{r}{AF}$, et il nous suffira de calculer AF en fonction des côtés pour avoir l'angle A. Ce calcul se fait en remarquant que les six tangentes issues de A, B, et C du cercle inscrit étant deux à deux égales (**287**), la somme de trois d'entre elles convenablement choisies est égale au demi-périmètre p, ce que l'on peut écrire : $AF + BD + CD = p$, d'où $AF = p - BC = p - a$. En définitive, on a :

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{r}{p-a} = \frac{S}{p(p-a)} = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p(p-a)}$$

$$= \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

formule permettant le calcul de l'angle A en fonction des côtés. On emploie les formules analogues pour B et C. Le triangle n'existe que si les quantités $p - a$, $p - b$, $p - c$ sont positives, c'est-à-dire que si chaque côté est inférieur à la somme des deux autres.

184. — Cherchons, comme application numérique, les angles et la surface du triangle ABC de côtés $a = 13^m$, $b = 14^m$, $c = 15^m$; les angles sont calculés à $0^\gamma,1$ près seulement à l'aide des tables

Données	*Formules*	*Résultats*
$a = 13^m$ $b = 14^m$ $c = 15^m$	$2p = a + b + c$ $2 \log \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \log(p-b) + \log(p-c) + \operatorname{colog} p + \operatorname{colog}(p-a)$ $2 \log S = \log p + \log(p-a) + \log(p-b) + \log(p-c)$	$A = 59^\gamma$ $B = 66^\gamma,8$ $C = 74^\gamma,8$ $S = 84^{m^2}$

Calculs auxiliaires	*Calculs définitifs*
$2p = 13 + 14 + 15 = 41$	$\log \operatorname{tg}\frac{A}{2} = \bar{1},6990$
$p = 21 \qquad p - a = 8$	$\bar{1},6901 = \log \operatorname{tg} 29^{\gamma} \qquad D = 89$
$p - b = 7 \qquad p - c = 6$	$855 \qquad 5 \qquad \Delta = 171$
$\log p = 1,3222$	$\frac{A}{2} = 29^{\gamma},5$
$\log (p - a) = 0,9031$	$A = 59^{\gamma}$
$\log (p - b) = 0,8451$	
$\log (p - c) = 0,7782$	
$\operatorname{colog} p = \bar{2},6778$	$\log \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \bar{1},7570$
$\operatorname{colog} (p - a) = \bar{1},0969$	$\bar{1},7562 = \log \operatorname{tg} 33^{\gamma} \qquad D = 8$
$\log (p - b) = 0,8451$	$157 \qquad 1 \qquad \Delta = 157$
$\log (p - c) = 0,7782$	
$2 \log \operatorname{tg}\frac{A}{2} = \bar{1},3980$	$\frac{B}{2} = 33^{\gamma},1$
$\operatorname{colog} p = \bar{2},6778$	$B = 66^{\gamma},2$
$\log (p - a) = 0,9031$	
$\operatorname{colog} (p - b) = \bar{1},1549$	$\log \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \bar{1},8239$
$\log (p - c) = 0,7782$	$\bar{1},8175 = \log \operatorname{tg} 37^{\gamma} \qquad D = 64$
$\log \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \bar{1},5140$	$588 \qquad 4 \qquad \Delta = 147$
$\operatorname{colog} p = \bar{2},6778$	$\frac{C}{2} = 37^{\gamma},4$
$\log (p - a) = 0,9031$	$C = 74^{\gamma},8$
$\log (p - b) = 0,8451$	
$\operatorname{colog} (p - c) = \bar{1},2218$	$\log S = 1,9243$
	$1,9243 = \log 84$
$\log \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \bar{1},6478$	
	Vérification :
$\log p = 1,3222$	$A = 59^{\gamma}$
$\log (p - a) = 0,9031$	$B = 66^{\gamma},2$
$\log (p - b) = 0,8451$	$C = 74^{\gamma},8$
$\log (p - c) = 0,7782$	
$2 \log S = 3,8486$	$A + B + C = 200^{\gamma},0$

185. Trigonométrie sphérique. — La trigonométrie plane étudie comme nous l'avons vu les angles des figures planes ; l'étude des angles des droites ou des plans dans l'espace, ou *trigonométrie sphérique*, est beaucoup plus complexe ; nous nous bornerons à en donner la formule fondamentale.

Prenons un trièdre OABC dont nous désignerons les angles de faces par $a = BOC$; $b = COA$; $c = AOB$ et par A, B, C les angles de dièdres (**201**) (*fig.* 47). Nous supposerons pour simplifier que tous ces angles sont aigus, mais la démonstration qui suit s'étendrait aisément au cas général.

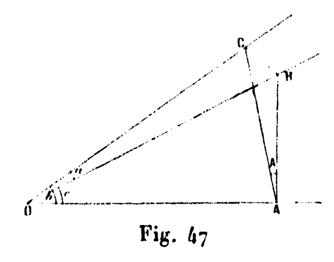


Fig. 47

Proposons-nous de calculer les dièdres connaissant les angles des faces. Pour évaluer l'angle dièdre A, élevons en un point A de OA, une perpendiculaire AB à OA dans le plan de la face AOB et de même AC dans le plan OAC. En calculant de deux façons différentes $\overline{BC}^2$, on a l'égalité :

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\, AB . AC \cos A = \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 - 2\, OB . OC \cos a$$

car l'angle CAB rectiligne du dièdre OA (**191**) mesure ce dièdre. En remarquant que $\overline{OB}^2 - \overline{AB}^2 = \overline{OC}^2 - \overline{AC}^2 = \overline{OA}^2$ on peut écrire cette relation

$$2\, AB . AC \cos A + 2\, \overline{OA}^2 - 2\, OB . OC \cos a = 0.$$

On met ordinairement cette relation sous la forme :

$$\cos a = \frac{OA}{OB} \cdot \frac{OA}{OC} + \frac{AB}{OB} \cdot \frac{AC}{OC} \cos A$$

Les divers rapports du second membre s'expriment immédiatement en fonction des lignes trigonométriques des angles b et c dans les triangles rectangles OAB et OAC (**179**), d'où la formule cherchée :

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

C'est là une relation des plus remarquables, car elle permet visiblement le calcul des dièdres quand on connaît les faces. On voit aussi que si l'on se donne un dièdre et deux quelconques des faces, on peut avoir la troisième.

Si, au lieu du trièdre OABC, on considère le triangle sphérique qu'il découpe sur la sphère de centre O et de rayon 1, la même formule donne une relation entre les *côtés* a, b, c et l'*angle* A du *triangle sphérique* ainsi découpé. C'est pour cette raison que la trigonométrie de l'espace s'appelle « trigonométrie sphérique ».

186. — Pour donner une application simple de cette formule cherchons quelle est à la surface de la terre, la distance de Bordeaux à Rio-de-Janeiro, ces deux villes étant représentées sur la figure (*fig.* 48) par les points B et R. La longitude de Bordeaux est approximativement en degrés 2°50′ Ouest (méridien de Paris) et sa latitude 44°50′ Nord ; les mêmes coordonnées géographiques pour Rio-de-Janeiro sont 45°30′ Ouest et 22°50′ Sud. Prenons le triangle sphérique PBR, les deux méridiens de B et R étant PBb et PrR. Leur angle, qui mesure le dièdre OP, est 45°30′ — 2°50′ = 42°,40′. L'arc de grand cercle PB est complémentaire de l'arc bB qui mesure la latitude et par suite égal à 90° — 44°50′ = 45°10′ ; de même l'arc PR est égal à 90° + 22°50′ = 112°50′. On a tous les éléments permettant le calcul de l'arc α de grand cercle BR, arc qui est le plus court chemin allant de B à R sur la surface de la terre (**236**) :

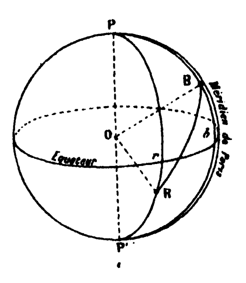


Fig. 48

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \cos 45°10'.\cos 112°50' + \sin 45°10'.\sin 112°50'.\cos 42°40' \\ &= -0{,}702.0{,}388 + 0{,}709.0{,}922.0{,}735 \\ &= -0{,}2724 + 0{,}4805 = -0{,}208\end{aligned}$$

D'où l'on déduit approximativement $\alpha = 78°$. Si l'on remarque

que 90° (quart du méridien) valent 10000 kilomètres (**47**), on en conclut que la distance cherchée est environ :

$$10\,000 \frac{78}{90} = 8\,700 \text{ kilomètres.}$$

Exercices. — Nos 212, 213, 214, 227, 231, 232, 233, 234, 235, 236, 237, 238, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 248, 249, 250, 251, 252, 253, 254, 255, 256, 257, 258, 259, 260, 261, 262, 263, 264, 265, 266, 267, 268, 269, 270, 296, 297, 373, 381, 382, 389, 498, 499.

GEOMETRIE

CHAPITRE PREMIER

DROITES ET PLANS

187. Droites et plans. Généralités. — La géométrie a son origine dans l'observation de certains objets dont elle étudie seulement la forme extérieure. On arrive par l'abstraction à préciser peu à peu les notions que fournit cette observation. Certaines d'entre elles sont primordiales et il est impossible de les introduire dans la science autrement que par une *définition* qui rappelle leur origine expérimentale. De même encore, certaines propriétés des êtres géométriques ainsi définis ne sont pas contenues dans leur définition, mais sont d'une évidence expérimentale indiscutable : ce sont les *axiomes*. C'est sur ces bases que le géomètre édifie une science en faisant appel seulement à la logique.

Les méthodes employées sont des plus diverses ; cependant, les propriétés les plus élémentaires concernent l'égalité ou l'inégalité de deux éléments, ce que l'on établit le plus souvent en amenant le deuxième élément à se superposer totalement ou partiellement au premier. Quant aux propriétés plus complexes, on les ramène à l'aide du raisonnement à des propriétés plus simples établies en général par superposition,

Les notions fondamentales de *droite*, *plan*, *courbe*, *surface*, *espace*, *angle*, *distance*,..... sont trop connues pour qu'il soit utile de les rappeler. Nous préciserons seulement quelques points en étudiant les propriétés de ces divers « êtres géométriques ».

Une courbe peut être considérée, soit comme l'intersection de deux surfaces, soit comme l'ensemble des positions successives occupées par un point ; c'est alors le *lieu géométrique* d'un tel point (**312** et suivants).

188. Droites et plans. — La ligne droite, qui est la plus simple de toutes les courbes, est définie de façon unique par la connaissance de deux de ses points. Elle a des propriétés très remarquables, car elle peut rester en coïncidence avec elle-même par pivotement, glissement ou retournement. Par glissement, on peut amener un point A (*fig.* 49) à venir occuper une position A′ fixée à l'avance. Un autre point tel que B vient alors en B′. La *distance* de A′ à B′ est dite égale à la distance de A à B. Si l'on a pris un sens positif sur la droite (**66**), cette égalité a lieu en grandeur et signe. Par retournement, on peut amener B en A et A en B. On obtient une portion de droite en pliant une feuille de papier.

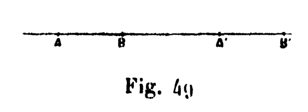


Fig. 49

Le plan, qui est la plus simple de toutes les surfaces, jouit de même de la propriété de pouvoir coïncider avec lui-même par pivotement autour d'un de ses points, par glissement, ou par retournement. Par glissement une droite D de ce plan (*fig.* 50) peut se superposer à une autre droite D′ donnée à l'avance. Dans ce déplacement une droite quelconque Δ vient en Δ′. L'*angle* de D et Δ est égal à l'angle de D′ et Δ′, ce que l'on écrit parfois : (D, Δ) = (D′, Δ′). Par retournement on peut amener D sur Δ et Δ sur D.

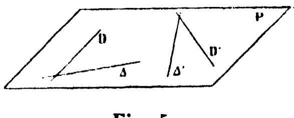


Fig. 50

Il ne suffit pas, pour déterminer un plan, de se donner deux de ses points, ou, ce qui revient au même, la droite qui les joint. Il peut tourner autour de cette droite et balaie alors tout l'espace. Pour achever de le déterminer, il faut se donner un nouveau point, hors de cette droite.

Deux droites données de façon quelconque dans l'espace ne se coupent pas en général. Tout plan passant par l'une d'elles

ne contient qu'un point de l'autre. S'il contient cette autre droite en entier, les deux droites ont un point commun et un seul. Cependant il peut arriver, comme nous le verrons, qu'elles soient parallèles (**208**).

Deux plans distincts se coupent en général suivant une droite et une seule, à moins qu'ils ne soient parallèles (**211**). Une droite et un plan ont un point commun et un seul, à moins que la droite ne soit tout entière dans le plan, ou ne soit parallèle à ce plan (**210**).

189. Angles. — Prenons une demi-droite Oy faisant avec $x'x$ deux *angles adjacents* xOy, x'Oy (*fig.* 51). Lorsque ces deux angles sont égaux, Oy étant en Oz, on dit que Oz et Ox sont *rectangulaires* ou *orthogonaux* ou encore que Oz est *perpendiculaire* sur $x'x$. Les angles égaux xOz et x'Oz sont *droits*. Il n'y a qu'une seule perpendiculaire en O à $x'x$. On forme quatre angles droits autour d'un point en pliant en quatre une feuille de papier.

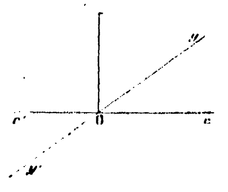


Fig. 51

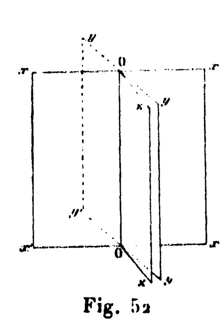
La somme des angles xOy et x'Oy est égale à deux angles droits ou, de façon abrégée, à deux droits. Ces angles sont dits *supplémentaires*. Si l'on prolonge Oy en Oy', les *deux angles opposés par le sommet* xOy *et* x'Oy' *sont égaux*, car on les amène en coïncidence en faisant tourner l'un d'eux de deux angles droits autour de son sommet. On verra de même que si diverses demi-droites partent d'un même point la somme des angles ainsi formés est égale à quatre droits.

Enfin signalons une dernière propriété facile à établir : *les bissectrices de deux angles adjacents supplémentaires* xOy, x'Oy *sont rectangulaires*.

Pour mesurer les angles on emploie, comme on le sait, le grade (1^G ou 1^γ) qui vaut $\frac{1}{100}$ d'angle droit. Il se subdivise en 100 minutes centésimales et chaque minute en 100 secondes centésimales. La numération décimale s'applique aux calculs

faits en grades. Il n'en est pas de même avec le degré (1°) qui vaut $\frac{1}{90}$ d'angle droit, car il se subdivise en 60 minutes sexagésimales et chaque minute en 60 secondes sexagésimales (**162**).

190. — Un demi-plan OOyy forme de même avec un plan $x'x'xx$ (*fig.* 52) contenant une droite OO deux *angles dièdres* adjacents yOx; yOx'. Lorsqu'ils sont égaux, OOyy étant en OOzz, les deux plans sont *rectangulaires* ou *perpendiculaires*. Les deux dièdres sont des *dièdres droits*. Il n'y a qu'un plan perpendiculaire à un plan donné et passant par une droite donnée de ce plan. Deux dièdres adjacents tels que xOy et yOx' ont une somme égale à deux dièdres droits. Ils sont dits *supplémentaires*. Deux *dièdres opposés par l'arête* xOy et $x'Oy'$ sont égaux et coïncident si l'on fait tourner l'un d'eux de deux dièdres droits autour de l'arête OO. Les plans bissecteurs de deux dièdres adjacents xOy, $x'Oy$ sont rectangulaires.


Fig. 52

Toutes ces propriétés sont identiques à celles des angles plans. Cette identité se poursuit dans la mesure des angles dièdres.

191. — Pour ramener cette mesure des angles dièdres à celle des angles plans, il nous faut d'abord établir la proposition fondamentale : *les perpendiculaires menées en un point à une droite sont toutes dans un même plan*, qui est dit *perpendiculaire* à la droite. C'est là une propriété dont on a une vérification en examinant le mouvement de rotation d'une porte : la ligne des gonds reste fixe pendant que l'arête inférieure décrit sensiblement le plan horizontal qui forme le plancher.

Pour justifier cette propriété, prenons les deux angles droits O_1OA et O_1OB (*fig.* 53). Les droites OA et OB déterminent un plan P. Montrons d'abord qu'une droite quelconque OC de ce plan fait un angle droit avec OO_1. Considérons les plans

OO_1A, OO_1B, OO_1C qui recoupent P suivant OA′, OB′, OC′ prolongements de OA, OB, OC. Faisons tourner ces trois plans autour de OO_1 de deux dièdres droits, ce qui amène OA en OA′, et de même OB en OB′. Le plan P qui passait par OA et OB est devenu le plan de OA′ et OB′; donc, il n'a pas changé et OC qui était dans ce plan P et dans le demi-plan COO_1 est venu se placer suivant l'intersection de ce même plan P et du demi-plan $C'OO_1$, c'est-à-dire en OC′. On en conclut que les deux angles O_1OC et O_1OC' sont égaux, c'est-à-dire que OO_1 est perpendiculaire sur CC′. Toute droite de P est donc perpendiculaire sur OO_1.

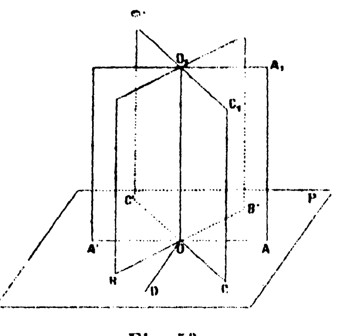


Fig. 53

Il est facile de prouver inversement que toute perpendiculaire OD en O à OO_1 est dans ce plan P, en remarquant que le plan OO_1D coupe P suivant une perpendiculaire en O à OO_1, perpendiculaire qui ne peut être autre que OD.

Il suffit de se donner deux positions O_1OA, O_1OB de l'angle droit pour que le plan OAB, lieu de OA, soit déterminé sans ambiguïté, ce que l'on énonce parfois : *si une droite* OO_1 *est perpendiculaire à deux droites* OA, OB *d'un plan* P, *elle est perpendiculaire à ce plan* (**215**).

Considérons maintenant divers demi-plans formant deux à deux des dièdres d'arête commune OO_1 et coupons-les par un plan P perpendiculaire en O à OO_1 (*fig.* 53). On appelle *angle rectiligne* du dièdre AOO_1C, l'angle AOC ainsi formé. Un même dièdre AOO_1C a plusieurs rectilignes. C'est ainsi que les plans perpendiculaires à OO_1 en O et O_1 donnent AOC et $A_1O_1C_1$. Ces rectilignes sont d'ailleurs égaux, car ils viennent en coïncidence si l'on déplace les deux plans, en les faisant glisser l'un sur l'autre, jusqu'à ce que O vienne en O_1. On verra de façon analogue que *deux dièdres égaux ont des rectilignes égaux* et qu'*un dièdre droit a un rectiligne droit*. En pratique,

pour mesurer des angles dièdres, on leur substitue leurs angles rectilignes. C'est ainsi que, par définition, un dièdre de 1^γ sera un dièdre dont le rectiligne est de 1^γ (**189**).

192. Perpendiculaires. — Nous allons chercher si l'on peut toujours faire passer par un point donné une droite, ou un plan, perpendiculaires à une droite, ou à un plan donné [1].

Nous avons déjà vu qu'en un point d'une droite on a une perpendiculaire et une seule à cette droite située dans un plan donné (**189**) et un plan et un seul perpendiculaire à cette droite en ce point (**191**). Plus généralement nous allons montrer que *par un point* O *extérieur à une droite $x'x$, on peut faire passer une droite et une seule* (**255**), *ainsi qu'un plan et un seul, perpendiculaires à cette droite $x'x$* (*fig.* 54). Faisons tourner le demi-plan défini par $x'x$ et le point O de deux dièdres droits autour de $x'x$, le point O vient en O'; les droites OO' et $x'x$ sont dans un même plan. Le point M où OO' et $x'x$ se coupent est le pied de la perpendiculaire OM cherchée, puisque les angles xMO et xMO' égaux et supplémentaires sont forcément droits. Un autre point M_1 de $x'x$ ne peut convenir puisque les angles xM_1O et xM_1O' seraient égaux et droits et que par suite M_1O, M_1O' seraient en prolongement. Il n'y a donc qu'une perpendiculaire OM abaissée de O sur $x'x$.

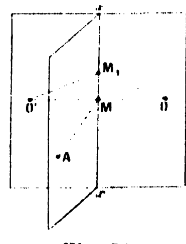


Fig. 54

Si le demi-plan $x'x$O tourne d'un angle dièdre quelconque, O vient en A et le plan OAO' est perpendiculaire en M à $x'x$, les deux angles xMO et xMA étant droits. Il est aisé de voir qu'il est le seul plan passant par O et perpendiculaire sur $x'x$.

193. — Si dans un plan P, on prend une droite Δ (*fig.* 55), on sait qu'il passe par cette droite un plan Q et un seul faisant

---

(1) Les constructions utilisées ici ne sont pas toujours celles que l'on emploie en pratique. Pour l'étude de ces dernières nous renvoyons le lecteur aux chapitres VI et VII (**282** et suivants, **295** et suivants).

avec P un dièdre droit ou si l'on veut perpendiculaire au plan P (**190**), mais on voit par suite que *par un point* O *de* P *on peut mener une infinité de plans perpendiculaires à* P, puisqu'il suffit de prendre une droite quelconque passant par ce point.

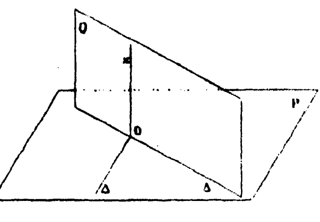


Fig. 55

En un point O *d'un plan* P, *on peut élever une perpendiculaire et une seule à ce plan* P. Soit en effet $\Delta' O z$ le rectiligne du dièdre droit des plans P et Q (**191**). Cet angle est droit et par suite Oz perpendiculaire à la fois sur $O\Delta$ et $O\Delta'$ est perpendiculaire sur le plan P. De même d'ailleurs $O\Delta'$ est perpendiculaire en O sur le plan Q.

Il n'y a pas d'autre perpendiculaire à P passant par O, car une telle droite si elle existe doit être perpendiculaire à $O\Delta'$, donc située dans le plan Q, et perpendiculaire à Δ dans ce plan, donc confondue avec Oz.

Des raisonnements qui précèdent découlent d'ailleurs un grand nombre de propriétés telles que les suivantes.

Tout plan Q *perpendiculaire à une droite* Δ' *d'un plan* P *est perpendiculaire à ce plan.*

Tout plan Q *perpendiculaire à un plan* P *en* O *contient la perpendiculaire en* O *à ce plan*, et par suite *l'intersection de deux plans perpendiculaires à* P *en* O *est perpendiculaire en* O *à ce plan.*

Tout plan Q *passant par la perpendiculaire en* O *à un plan* P *est perpendiculaire à ce plan.*

194. — On a des propriétés analogues lorsque le point O n'est pas dans le plan P : *par un point* O *extérieur à un plan* P, *on peut faire passer, d'une part, une infinité de plans perpendiculaires à un plan* P *et, d'autre part, une perpendiculaire et une seule à ce plan* (*fig.* 56). Prenons en effet une droite quelconque Δ dans le plan P et menons par le point O le plan Q perpendiculaire à Δ (**192**). On vient de voir qu'un tel plan est

perpendiculaire à P. La droite Δ étant quelconque dans le plan P, on voit bien qu'il y a une infinité de plans passant par O et perpendiculaires à P. Prenons maintenant un second plan Q' tel que Q. L'intersection OA de ces deux plans est, comme on l'a vu, perpendiculaire à P en A (**193**). Il n'y a pas d'autre perpendiculaire telle que OA' issue de O à P, car OA et OA' seraient deux perpendiculaires abaissées de O sur la droite AA' du plan P, ce qui n'est pas possible (**192**).

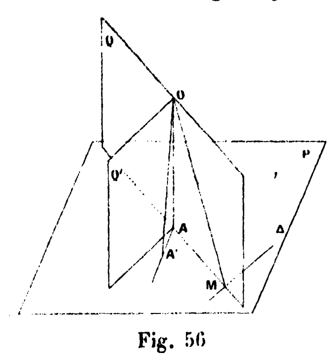


Fig. 56

Si l'on désigne par M le point où Δ, perce le plan Q, la droite MO est perpendiculaire en M sur Δ, puisque Δ est perpendiculaire sur Q, d'où l'énoncé connu sous le nom de *théorème des trois perpendiculaires :*

Si une droite OA *est perpendiculaire sur un plan* Q *et que* OM *soit la perpendiculaire abaissée de* O *sur une droite quelconque* Δ *de ce plan, la droite* AM *est aussi perpendiculaire à* Δ, ou encore : *si l'on abaisse de* O *une perpendiculaire* OM *sur une droite* Δ *d'un plan* P, *la perpendiculaire en* M *à* Δ *dans le plan* P *passe par le pied* A *de la perpendiculaire abaissée de* O *sur ce plan.*

195. Projections. — On appelle *projection* (**216**) d'un point O sur un plan P le pied A de la perpendiculaire abaissée de O sur le plan. La droite OA est la *projetante* du point ; P est le plan de projection. Si O décrit une courbe quelconque de l'espace, A décrit dans le plan P une courbe qui est la *projection* de la courbe de l'espace.

Prenons une droite quelconque OM passant par O (*fig.* 56), le plan OAM contient, d'après ce qui précède (**194**), toutes les projetantes des divers points de la droite. On en déduit que : *la projection d'une droite* OM *sur un plan* P *est une droite* MA *passant par le pied* A *de la perpendiculaire abaissée de* O *sur ce plan.* Le plan MAO s'appelle le *plan projetant* la droite OM.

Il y a deux cas particuliers à considérer : celui où la droite OM ne coupe pas le plan, cas que nous examinerons un peu plus loin (**210**), et celui où la droite passant par O est précisément la perpendiculaire OA abaissée de ce point sur le plan, auquel cas la projection se réduit au point A.

Les diverses propriétés qui précèdent paraîtront presque évidentes au lecteur, s'il veut bien supposer que le plan P des figures 53, 55, 56 est un plan *horizontal*, par exemple la surface d'une eau tranquille, le plancher d'une salle,..., que les perpendiculaires à ce plan passant par O sont des *verticales*, telles que la ligne du fil à plomb, les arêtes des dièdres que forment les murs d'une salle,..., que les plans passant par ces verticales sont des *plans verticaux*, tels que les murs d'une maison,... (**212**).

En particulier signalons la disposition formée par le plancher d'une salle et deux murs rectangulaires. On a trois plans perpendiculaires deux à deux et chacune des trois arêtes d'intersection est perpendiculaire aux deux autres. On dit que ces trois droites forment un *trièdre trirectangle* (**201**). C'est la même disposition que l'on retrouve dans le coin d'une boîte, d'une table, etc...

196. Rotations et symétries. — Prenons un *axe de rotation* quelconque $x'x$ (*fig.* 57) et un point A quelconque de l'espace. Si l'on fait tourner le demi-plan $x'x$A autour de $x'x$ d'un angle dièdre quelconque, le point A vient en A′ dans le demi-plan P′. La perpendiculaire AO abaissée de A sur $x'x$ vient en A′O. L'angle plan AOA′ $= \alpha$ s'appelle l'*angle de rotation*.

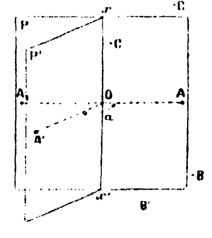


Fig. 57

Si l'on prend des points en nombre quelconque, A, B, C,... qui, après une rotation de α dans le même sens, viennent en A′, B′, C′..., les figures formées par A, B, C,... et A′, B′, C′,... sont superposables ; les longueurs correspondantes ainsi que les angles correspondants sont donc égaux.

Un cas très important est celui où l'on fait tourner le demi-

plan $Ax'x$ de deux dièdres droits : OA vient alors en OA_1 dans le prolongement de OA. Les points A et A_1 sont dits *symétriques* par rapport à $x'x$. On peut construire A_1 en prolongeant la perpendiculaire AO abaissée de A sur $x'x$ d'une longueur $OA_1 = OA$. La droite $x'x$ s'appelle l'*axe de symétrie*. Toute figure du plan P a son symétrique dans ce plan. Deux figures symétriques par rapport à $x'x$ sont superposables.

C'est ainsi que la bissectrice d'un angle est un axe de symétrie pour les deux côtés de l'angle ; la perpendiculaire au milieu d'un segment est axe de symétrie pour ce segment.

Si nous nous bornons maintenant à considérer des points situés dans le plan Q perpendiculaire en O à $x'x$ (*fig.* 58), la rotation d'angle α qui amène A en A', M en M', N en N', etc... s'appelle une *rotation de centre* O. C'est un cas particulier de celui qui précède. De même la symétrie qui amène A en A_1, B en B_1,... s'appelle une *symétrie de centre* O. Toute figure du plan Q est superposable à sa symétrique par rapport au point O (**319**).

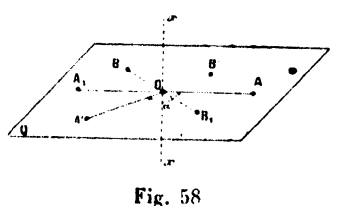


Fig. 58

Comme le lecteur le verra aisément, nous avons déjà employé les symétries et les rotations dans ce qui précède [1] (**190** et suivants).

197. Triangles. — Les définitions des mots *triangles, quadrilatères, pentagones,... polygones, trièdres, polyèdres, polyèdres convexes, polyèdres concaves*, des mots *sommets, arêtes*,... sont bien connues du lecteur. Disons seulement qu'un polygone est *plan* ou *gauche* suivant que ses côtés sont ou non dans un même plan. Un triangle est plan et convexe, mais il n'en est pas toujours de même pour les autres polygones.

Un triangle est dit *rectangle* lorsqu'il a un angle droit. On

---

[1] Nous reviendrons sur ces diverses questions pour les traiter de façon beaucoup plus générale au chapitre VIII (**318** et suivants).

obtient de tels triangles AOB (*fig.* 59) en prenant deux points A et B quelconques sur les côtés d'un angle droit AOB ; le côté AB opposé à l'angle droit s'appelle l'*hypoténuse*, les deux autres côtés OA, OB sont les *côtés de l'angle droit*. On ne peut pas avoir deux angles droits dans un triangle, car si l'angle en B était droit, on pourrait abaisser du point A deux perpendiculaires sur OB, ce qui n'est pas possible (**219**).

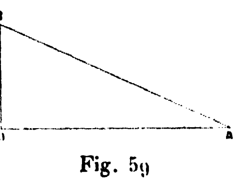


Fig. 59

Si les longueurs OA et OB sont égales, le triangle est *rectangle isocèle*. Plus généralement un triangle OAB (*fig.* 60) est *isocèle* si deux côtés OA et OB sont égaux ; AB est alors la *base*. La bissectrice OM de l'angle en O est un axe de symétrie de ce triangle (**196**), c'est-à-dire que ce triangle coïncide avec son symétrique par rapport à OM. En effet OA et OB sont deux droites symétriques par rapport à Ox et de plus OA = OB. Donc le symétrique de A par rapport à OM est B. Les angles à la base OAB et OBA qui sont symétriques sont égaux. La droite OM, qui est *bissectrice* de l'angle en O, est aussi perpendiculaire sur AB, c'est-à-dire est la *hauteur* issue de O et passe par le milieu de AB, c'est-à-dire est la *médiane* issue du même sommet O.

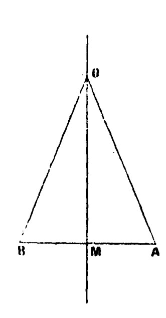


Fig. 60

Inversement, si dans un triangle OAB, les deux angles en A et B sont égaux, il en est de même des côtés OA et OB. On voit en effet que la perpendiculaire MO à AB en son milieu M (*fig.* 60) est un axe de symétrie du triangle ; le point O intersection de AO et BO est à lui-même son propre symétrique, donc est sur OM, et de plus OA = OB. On énonce parfois ces divers résultats comme il suit :

Deux obliques égales OA *et* OB *s'écartent également du pied* M *de la perpendiculaire abaissée de* O *sur* AB *et, inversement, si deux obliques s'écartent également du pied de cette perpendiculaire, elles sont égales.*

Deux obliques égales OA *et* OB *font en* A *et* B *des angles*

égaux avec AB *et, inversement, si deux obliques* OA *et* OB *font des angles égaux avec* AB *elles sont égales.*

Un triangle est dit *équilatéral* quand ses trois côtés sont égaux. Pour justifier leur existence, il suffira de refaire ici le raisonnement donné plus loin pour les polygones réguliers (**258**). Un tel triangle a ses triangles égaux et, inversement, si un triangle a ses trois angles égaux, il est équilatéral. Il a trois axes de symétrie ; chacun d'eux est à la fois bissectrice, hauteur et médiane. Leur point commun s'appelle le *centre* du triangle (**219**).

198. Triangles égaux. — Il est très important de savoir reconnaître si deux triangles sont ou non égaux, c'est-à-dire s'ils peuvent ou non être amenés en coïncidence. Cela tient à ce que, pour prouver l'égalité de deux longueurs ou de deux angles, il est souvent commode de les considérer comme des côtés ou des angles de triangles tracés. C'est là une idée très importante qui se retrouve en particulier en Trigonométrie (**161**). Parmi les caractères permettant de reconnaître avec certitude l'égalité de deux triangles, nous nous bornerons à ceux qui font intervenir les éléments les plus simples, c'est-à-dire les côtés et les angles. Ces éléments sont au nombre de six, comme on le voit. Nous allons voir que, en général, l'identité de trois d'entre eux suffit pour entraîner celle des autres.

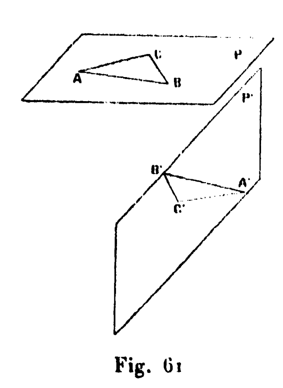


Fig. 61

Prenons deux triangles ABC, A'B'C' situés dans des plans quelconques P et P' (*fig.* 61). Nous considérerons comme éléments correspondants les angles A et A', ou B et B', ou C et C', ou encore les côtés BC et B'C', ou CA et C'A', ou enfin AB et A'B'. Lorsque nous dirons que deux triangles ont deux éléments égaux il sera sous-entendu qu'il s'agit d'éléments correspondants.

Deux triangles ABC, A'B'C' *sont égaux s'ils ont deux angles égaux* : A = A' *compris entre des côtés respectivement égaux* :

AB = A'B' ; AC = A'C' (*fig.* 61). On voit immédiatement que de tels triangles peuvent se superposer. On établit de même que *deux triangles* ABC, A'B'C' *sont égaux s'ils ont deux côtés égaux* : BC = B'C' *adjacents à des angles respectivement égaux* : B = B' ; C = C'. Il y a un troisième cas d'égalité dont la démonstration est un peu plus longue : *deux triangles* ABC, A'B'C' *sont égaux si les trois côtés de l'un sont respectivement égaux aux côtés de l'autre* : AB = A'B' ; BC = B'C' ; CA = C'A'. Amenons dans ce dernier cas le triangle A'B'C' à être en ABC_1 (*fig.* 62), A' étant en A, B' en B et C' en C_1, de façon que C et C_1 soient de part et d'autre de AB. Par hypothèse $AC = AC_1$; $BC = BC_1$. La droite CC_1 base du triangle isocèle ACC_1 est telle que la perpendiculaire en son milieu M passe par A (**197**). De même dans le triangle BCC_1 la perpendiculaire à CC_1 en M doit passer par B ; c'est donc la droite AB. Les deux triangles ABC et ABC_1 étant symétriques par rapport à AB sont égaux, et il en est par suite de même de ABC et A'B'C'.

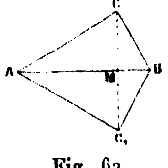


Fig. 62

199. — On peut se demander par analogie avec les énoncés précédents si deux triangles ne sont pas égaux quand ils ont trois éléments quelconques égaux, angles ou côtés. Examinons les divers cas qui restent à considérer.

Si deux triangles ABC, A'B'C' ont les trois angles égaux : A = A' ; B = B' ; C = C', ils ne sont pas égaux en général comme nous le verrons plus loin en parlant des triangles semblables (**248**). D'ailleurs nous établirons que la somme des angles d'un triangle est égale à deux droits (**218**) et par suite que les égalités A = A', B = B' entraînent C = C'.

Si dans les deux triangles ABC, A'B'C' on a A = A', B = B' et en outre AC = A'C', ces triangles sont égaux bien que les côtés égaux ne soient pas adjacents aux angles égaux, puisque les égalités A = A' ; B = B' entraînent C = C', comme nous venons de le dire. On est ramené à un des cas d'égalité qui précèdent.

Enfin si les deux triangles ont les côtés égaux AB = A'B', AC = A'C' et deux angles égaux B = B' non compris entre les côtés égaux, ils ne sont pas forcément égaux; c'est ainsi que dans le triangle isocèle ABB' (*fig.* 63) une droite AC joignant A à un point de la base compris entre B et B' donne deux triangles ABC, AB'C dans lesquels AB = AB'; AC = AC ; B = B' (**197**) et qui néanmoins ne sont pas égaux.

Fig. 63

200. — On pourrait donner un grand nombre de cas d'égalité particuliers aux triangles isocèles, rectangles, ... Nous nous bornerons aux quelques énoncés qui suivent.

Deux triangles rectangles ABC, A'B'C' *sont égaux s'ils ont deux angles égaux (autres que l'angle droit)* : B = B' *et deux côtés de l'angle droit égaux* : AB = A'B', *ou encore* : AC = A'C' (*fig.* 64). Il y a comme on le voit deux cas à considérer; dans le premier, on a B = B' et AB = A'B', et l'on se ramène à un cas d'égalité des triangles quelconques puisque A = A'. Dans le second cas, B = B' ; AC = A'C'. Amenons en coïncidence les angles droits A' et A de façon que A'C' vienne en AC. Les deux hypoténuses B'C' et BC sont devenues deux obliques issues d'un même point C et faisant des angles égaux avec AB, donc elles sont égales et s'écartent également du pied A de la perpendiculaire (**197**). Les deux triangles sont par suite égaux.

Deux triangles rectangles ABC *et* A'B'C' *sont égaux s'ils ont deux angles égaux* : B = B' *et les hypoténuses égales* : BC = B'C' (*fig.* 64). Si l'on amène en coïncidence les angles B et B' et les hypoténuses égales BC et B'C', on voit que les points A et A' coïncident également puisque d'un point C on ne peut abaisser qu'une perpendiculaire sur AB (**192**).

Fig. 64

Deux triangles rectangles ABC, A'B'C' *sont égaux s'ils ont les hypoténuses égales* : BC = B'C' *et deux côtés de l'angle droit égaux* : AC = A'C'. On amène les angles droits en coïncidence ainsi que les côtés A'C' et AC. Les

deux hypoténuses sont alors des obliques égales et s'écartent également du pied de la perpendiculaire (**197**). Les deux triangles sont bien égaux.

201. Trièdres. — Dans un trièdre SABC (*fig.* 65) on appelle *faces* les angles BSC, CSA, ASB et *dièdres* les angles que font deux à deux les plans des faces ; on a ainsi les dièdres SA, SB, SC. On a les mêmes définitions pour un angle polyèdre. Les éléments correspondants de deux angles polyèdres peuvent être égaux sans que ces deux angles soient superposables. Prenons par exemple un angle trièdre SABC (*fig.* 65) et le trièdre opposé par le sommet SA′B′C′. Ces deux trièdres ont leurs faces et leurs dièdres égaux, mais nous allons voir qu'ils ne sont pas superposables. Si dans le plan SBCB′C′, on fait tourner SB′C′ de deux angles droits, SB′ vient en SB et SC′ en SC, mais SA′ ne vient pas sur SA, puisque ces deux demi-droites sont et restent de part et d'autre du plan SBCB′C′. On dit que les deux trièdres n'ont pas le même sens. Il est d'ailleurs aisé de voir que tout trièdre ayant ses éléments correspondants égaux à ceux de SABC est superposable soit à SABC soit à SA′B′C′. Tous ces trièdres se rangent en deux catégories. Les uns sont dits *égaux* à SABC, les autres sont dits *symétriques* de SABC (**320**).

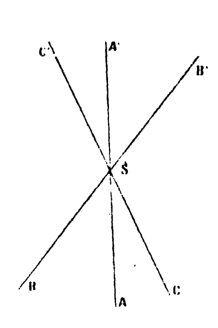


Fig. 65

Si le trièdre SABC a deux éléments égaux, faces ou dièdres, on peut établir la superposition de ce trièdre et de son symétrique, les éléments que l'on superpose n'étant pas d'ailleurs des éléments correspondants. Supposons d'abord que le trièdre SABC ait deux faces égales : ASB = ASC ; on dit qu'il est *isocèle*. Faisons coïncider les dièdres SA′ et SA (*fig.* 65), la face A′SC′ venant recouvrir la face ASB et la face A′SB′ venant sur ASC, ce qui est possible puisque les angles de ces faces sont égaux. Les deux trièdres se sont bien superposés ; en particulier, le dièdre SB′ égal à SB est venu coïncider avec le dièdre SC.

Dans un trièdre isocèle les angles dièdres opposés aux faces égales sont égaux.

On établirait de façon analogue que, si dans un trièdre deux dièdres sont égaux, ce trièdre peut se superposer à son symétrique et de plus il est isocèle.

Un trièdre peut être *trirectangle* c'est-à-dire avoir à la fois ses trois faces et ses trois dièdres égaux à un angle droit (**195**).

202. — Etant donné un trièdre SABC (*fig.* 66), élevons en S les perpendiculaires SA′ sur la face BSC, SB′ sur CSA et SC′ sur ASB. Il y a deux demi-droites passant par S′ et perpendiculaires au plan SBC. Nous prenons celle de ces demi-droites qui est du même côté que SA par rapport à ce plan SBC. On choisira de façon analogue les demi-droites SB′ ; SC′.

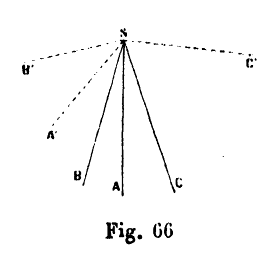


Fig. 66

Tout trièdre égal à S′A′B′C′ ou à son symétrique est dit *supplémentaire* du trièdre SABC.

Le trièdre SABC est d'ailleurs supplémentaire de SA′B′C′. On voit par exemple que SC est perpendiculaire sur le plan A′SB′ en remarquant que c'est l'intersection des deux plans SAC et SBC dont chacun est perpendiculaire sur A′SB′ (**193**). Nous laissons au lecteur le soin de voir que de plus SA par exemple est bien du même côté du plan SB′C′ que SA′.

On a la propriété fondamentale suivante : *l'angle d'une face d'un trièdre est supplémentaire de l'angle plan du dièdre correspondant dans le trièdre supplémentaire.* En coupant la figure par le plan B′SC′ perpendiculaire à l'arête SA, le dièdre SA est coupé suivant un rectiligne $\beta S \gamma$ (**191**) (*fig.* 67) ; d'après ce qui précède $S\gamma$ est perpendiculaire à SB′ et $S\beta$ à SC′, la disposition de ces diverses demi-droites étant de plus celle qu'indique la figure. Pour démontrer que les deux angles B′SC′ et $\beta S \gamma$ sont supplémentaires,

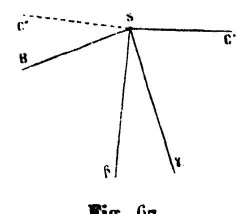


Fig. 67

il suffit d'effectuer une rotation de un angle droit de $\gamma S \beta$ autour de son sommet, ce qui l'amène en B'SC'' angle supplémentaire de B'SC'.

203. Trièdres égaux. — Il existe des cas d'égalité des trièdres analogues aux cas d'égalité des triangles. *Deux trièdres* SABC, S'A'B'C' *sont égaux ou symétriques s'ils ont deux dièdres égaux :* SA = S'A' *compris entre des faces égales :* ASB = A'S'B' et ASC = A'S'C' (*fig.* 68). Il est en effet aisé de superposer S'A'B'C' à SABC, ou à son symétrique suivant la disposition des éléments.

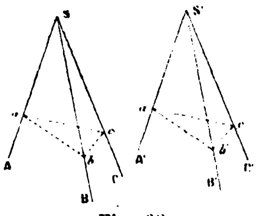


Fig. 68

Deux trièdres SABC, S'A'B'C' *sont égaux ou symétriques si les trois faces de l'un sont égales aux faces correspondantes de l'autre* : ASB = A'S'B'; BSC = B'S'C'; CSA = C'S'A'. Indiquons sommairement la démonstration. On peut supposer que les éléments des deux trièdres aient la même disposition, en remplaçant s'il y a lieu l'un d'eux par son symétrique. Portons sur les arêtes SA et S'A' des longueurs égales S*a* = S'*a'* et coupons les deux trièdres par les plans perpendiculaires en *a* à S*a* et en *a'* à S*a'*, ce qui donne les triangles *abc*, *a'b'c'*. Ces deux triangles ont leurs trois côtés égaux. En effet les triangles rectangles S*ac*, S'*a'c'* sont égaux (**200**) et donnent *ac* = *a'c'* et en outre S*c* = S'*c'*. De même les triangles égaux S*ab* et S'*a'b'* donnent *ab* = *a'b'* et S*b* = S'*b'*. Enfin les deux triangles S*ac* et S'*a'c'* sont égaux d'après ce qui précède (**198**) et par suite *bc* = *b'c'*. Les deux triangles *abc*, *a'b'c'* étant superposables, les deux trièdres le sont.

Il y a deux autres cas d'égalité des trièdres : *deux trièdres* SABC, S'A'B'C' *sont égaux ou symétriques s'ils ont deux faces égales* : BSC = B'S'C' *adjacentes à des dièdres égaux* : SB = S'B'; SC = S'C'. *Deux trièdres sont égaux ou symétriques si les trois dièdres de l'un sont égaux aux trois dièdres correspondants de l'autre.* Le premier de ces deux cas pourrait s'établir directement par la superposition des deux trièdres, mais la considération

des trièdres supplémentaires permet de déduire ces deux cas d'égalité des deux précédents. Si par exemple deux trièdres S et T ont les trois dièdres égaux, les trièdres supplémentaires S′ et T′ ont leurs faces correspondantes égales et sont par suite égaux ou symétriques. Il en est donc de même des trièdres S et T.

Il y a comme on le voit des analogies nombreuses entre les triangles et les trièdres, si l'on fait correspondre les mots « face » et « dièdre » aux mots « côté » et « angle » ; mais il y a aussi des différences notables. C'est ainsi que deux trièdres sont égaux ou symétriques s'ils ont tous leurs dièdres égaux, tandis que, en général, deux triangles qui ont leurs angles égaux ne sont pas égaux (**248**).

204. Inégalités. — Il arrive parfois, quoique rarement, que l'on ait besoin de prouver, non plus que deux grandeurs sont égales, mais que l'une est plus grande ou plus petite que l'autre (**11**). Nous allons indiquer quelques-uns des résultats les plus intéressants auxquels conduit ainsi la comparaison des distances ou celle des angles.

Menons d'un point O à une droite $x'x$ la perpendiculaire OA et diverses obliques OB, OC,.. (*fig.* 69). Nous allons montrer que l'on a $OA < OB < OC < \ldots$ Prenons par exemple les deux obliques OB et OC. Pour porter sur OC une longueur OE égale à OB, il est commode ici de mener la bissectrice OD de l'angle BOC. L'angle aigu ODB est inférieur à l'angle obtus ODC.

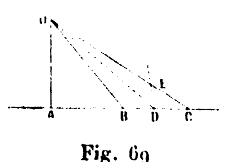


Fig. 69

Donc la droite DE symétrique de DB (**196**) par rapport à DO est dans l'angle ODC ; elle passe par le point E symétrique de B par rapport à OD. Donc E est entre O et C et l'on a $OE < OC$, ou encore $OB < OC$. Le même raisonnement montrerait que OA est plus courte que toute oblique.

On voit que, *si deux obliques s'écartent inégalement du pied de la perpendiculaire, celle qui s'en écarte le plus est la plus grande* (**197**). La démonstration suppose B et C d'un même côté de A, mais il est facile de l'étendre au cas où B et C sont

de part et d'autre de A, en remplaçant l'un des deux points par son symétrique par rapport à OA.

En particulier, *la plus courte distance d'un point* O *à une droite est la longueur de la perpendiculaire* OA *abaissée de* O *sur la droite*. C'est là une propriété très importante que l'on peut encore énoncer : *dans un triangle rectangle* OAB, *l'hypoténuse* OB *est plus longue qu'un côté* OA *de l'angle droit ;* ou encore *la projection* OA *d'un segment* OB *sur une droite passant par son extrémité* O *est plus courte que ce segment* (**195**, **216**).

Enfin, si l'on remarque que la perpendiculaire abaissée d'un point sur un plan est perpendiculaire sur toutes les droites passant par son pied dans ce plan (**191**), on voit que, ici encore, *deux obliques égales s'écartent également du pied de la perpendiculaire* et que *la plus courte distance d'un point à un plan est la longueur de la perpendiculaire abaissée de ce point sur ce plan.*

Nous allons voir de façon analogue que *la projection d'un angle aigu* ASB *sur un plan* P *passant par un côté* SB *est plus petite que cet angle, tandis que la projection d'un angle obtus* ASB′ *est plus grande que cet angle* (**216**) (*fig.* 70).

Fig. 70

Coupons la figure par un plan perpendiculaire à BB′, ce qui donne l'angle ABA′ rectiligne du dièdre AB′ BA′ (**191**). D'après ce qui précède BA′ projection de BA sur P est inférieur à BA. Si l'on fait tourner le plan BAS autour de BS pour l'appliquer sur P, A vient en A_1 tel que BA_1 soit supérieur à BA′, et l'on voit bien que l'angle BSA_1 égal à BSA est plus grand que l'angle BSA′, et que l'angle $B'SA_1$ égal à B′SA est plus petit que B′SA′.

205. — On déduit aisément de ce qui précède la propriété suivante qui est d'ailleurs presque intuitive : *la ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre* ou, de façon plus précise, elle est plus courte que toute ligne brisée. Le cas le plus simple peut s'énoncer ainsi : *un côté d'un triangle est plus*

petit que la somme des deux autres (*fig.* 71). Par exemple BC < AB + AC. Projetons A en A', on a BA' < BA et CA' < CA, comme nous venons de le voir, d'où BC < AB + AC.

Si l'on veut établir de même que BA < BC + CA, on remarque que, la projection C' de C sur AB tombant en dehors de AB, l'on a BA < BC' < BC, donc *a fortiori* BA < BC + CA.

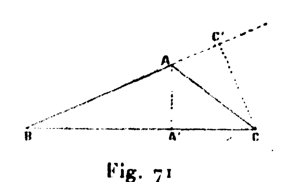


Fig. 71

On peut encore dire qu'*un côté quelconque d'un triangle est plus grand que la différence des deux autres*; c'est ainsi que l'inégalité BC < AB + AC équivaut à AB > BC — AC (**11**).

Une démonstration rigoureusement analogue à celle-ci montre que dans un angle trièdre (**201**), l'angle d'une face est plus petit que la somme des angles des deux autres, ou sous forme abrégée : *dans un trièdre une face est plus petite que la somme des deux autres.*

Ces propriétés s'étendent immédiatement à une ligne brisée quelconque, si l'on compare un côté à la somme des autres, ou à un angle polyèdre quelconque, si l'on compare une des faces à la somme des autres.

De même encore elles permettent d'établir les propriétés suivantes : *un polygone convexe a toujours un périmètre plus grand que tout autre polygone convexe tracé à son intérieur*, et, de même, *la somme des faces d'un angle polyèdre convexe est plus grande que celle des faces de tout autre angle polyèdre convexe de même sommet et situé à l'intérieur du premier.* Démontrons par exemple cette dernière propriété. Le point S, non marqué sur la figure (*fig.* 72), étant le sommet commun des deux angles polyèdres, représentons les sections par un même plan en DEFG et ABC, ce triangle étant complètement intérieur au quadrilatère, d'après l'hypothèse, pourvu que l'on choisisse convenablement le plan sécant. Je dis que ASB + BSC + CSA est inférieur à DSF + ESF + FSG + GSD. Les points H et J étant

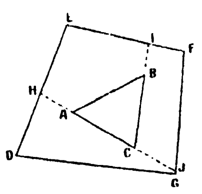


Fig. 72

sur AC et le point I sur AB comme le montre la figure, on a successivement :

$$\text{ASB} + \text{BSC} + \text{CSA} < \text{CSH} + \text{HSE} + \text{ESI} + \text{ISC}$$
$$(\text{car ASB} < \text{ASH} + \text{HSE} + \text{ESI} + \text{ISB})$$

puis :

$$\text{CSH} + \text{HSE} + \text{ESI} + \text{ISC} < \text{JSH} + \text{HSE} + \text{ESF} + \text{FSJ}$$
$$(\text{car CSI} < \text{ISF} + \text{FSJ} + \text{JSC})$$

et enfin

$$\text{JSH} + \text{HSE} + \text{ESF} + \text{FSJ} < \text{GSD} + \text{DSE} + \text{ESF} + \text{FSG}$$
$$(\text{car HSJ} < \text{HSD} + \text{DSG} + \text{GSJ})$$

Il y a cependant ici une différence à noter entre les triangles et les trièdres. Alors que le périmètre d'un triangle ou d'un polygone peut être aussi grand qu'on le veut, nous allons voir que *la somme des faces d'un angle trièdre ou d'un angle polyèdre convexe est toujours plus petite que quatre angles droits*. Il suffit d'établir cette propriété pour un angle trièdre, car on peut toujours trouver un angle trièdre contenant à son intérieur un angle polyèdre convexe donné de même sommet. Soit alors SABC le trièdre considéré (*fig.* 73). Prolongeons une arête SA en SA'. On a : CSA + ASB + BSC < CSA + ASB + BSA' + A'SC, puisque BSC est inférieur à BSA' + A'SC. On voit que la nouvelle somme ainsi obtenue vaut précisément quatre droits, puisque ASB et BSA' sont supplémentaires ainsi que ASC et CSA'.

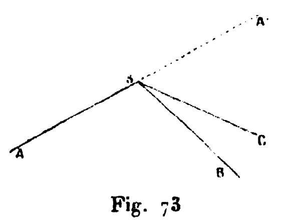


Fig. 73

206. Applications. — On peut déduire de ce qui précède un grand nombre de propriétés simples concernant les droites et les plans. Nous énoncerons les principales, laissant au lecteur le soin de les justifier et de faire les figures qui correspondent aux divers énoncés. Nous le prions, une fois pour toutes, de se reporter au Chapitre VIII où il trouvera quelques indications générales sur la recherche des solutions dans les problèmes de géométrie.

Disons cependant que, pour établir l'existence d'un *lieu géométrique*, qu'il s'agisse d'une courbe ou d'une surface, prise en totalité ou en partie, il est indispensable d'établir : 1° que tout point ayant la propriété indiquée appartient à cette portion de courbe ou de surface; 2° que tout point appartenant à cette portion a la propriété considérée (**312**).

Le lieu géométrique des points d'un plan équidistants de deux points de ce plan est la perpendiculaire élevée au milieu du segment qui les joint. Le lieu géométrique des points de l'espace équidistants des deux mêmes points est le plan perpendiculaire au milieu de ce segment (**197**, **232**).

Le lieu géométrique des points de l'espace équidistants de trois points non en ligne droite est une perpendiculaire au plan des trois points (**232**).

Le lieu des points d'un plan équidistants de deux droites qui se coupent dans ce plan est formé des deux bissectrices des angles que forment ces droites. On sait d'ailleurs que ces deux bissectrices sont axes de symétrie de l'angle considéré (**197**) et sont rectangulaires (**189**).

Le lieu des points équidistants de deux plans qui se coupent est formé des deux plans bissecteurs des angles qui forment ces plans. Ces plans sont d'ailleurs rectangulaires (**190**).

Dans un triangle les trois perpendiculaires aux milieux des côtés se coupent en un même point, ou sous forme plus abrégée : *dans un triangle les trois médiatrices sont concourantes.* Le point de concours s'appelle *centre du cercle circonscrit* au triangle (**232**).

Dans un triangle les six bissectrices sont trois à trois concourantes. Un des quatre points de concours est intérieur au triangle et s'appelle *centre du cercle inscrit*; les autres sont les *centres des cercles ex-inscrits* (**229**). Remarquons que chaque angle du triangle donne deux droites rectangulaires lieux de points équidistants des côtés de cet angle; l'une s'appelle la *bissectrice intérieure*, l'autre la *bissectrice extérieure*. C'est la bissectrice intérieure qui passe au centre du cercle inscrit.

Enfin nous ajouterons à ces propriétés du triangle les deux suivantes qui seront démontrées un peu plus loin.

Dans un triangle les trois hauteurs sont concourantes. Le point de concours s'appelle l'orthocentre du triangle (**224**).

Dans un triangle les trois médianes sont concourantes. Le point de concours s'appelle le centre de gravité du triangle (**224**).

Exercices. — Nos 124, 165, 166, 271, 272, 273, 274, 275, 276, 277, 278, 279, 280, 281, 282, 283, 284, 285, 286, 287, 288, 289, 290, 291, 292, 293, 294, 406.

CHAPITRE II

PARALLÈLES

207. Droites parallèles. — Prenons une droite Δ (*fig.* 74) et un point A extérieur à cette droite. Supposons que le plan P de A et de Δ glisse sur lui-même de façon que la droite Δ reste constamment en coïncidence avec elle-même; le point A décrit alors une certaine courbe D qui jouit évidemment de la propriété d'avoir tous ses points à la même distance de Δ. *Nous admettrons que le lieu géométrique ainsi obtenu pour* A *est une droite* D. *Nous dirons par définition que* D *est la parallèle à* Δ *menée par* A. C'est là une propriété qui ne résulte pas des notions déjà connues ou admises. On peut la considérer comme établie par l'expérience; par exemple, lorsqu'un trusquin se déplace, la pointe traçante décrit une droite. D'ailleurs toutes ses conséquences sont vérifiées par la pratique. Un tel mouvement s'appelle une *translation* (¹) (**213**).

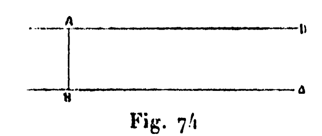


Fig. 74

Dans ce déplacement les divers points de D décrivent cette droite et les autres points du plan P décrivent des droites qui

---

(¹) Ici, comme pour les rotations, la notion de mouvement, quoique faisant intervenir le temps, facilite beaucoup la compréhension. Il va sans dire qu'une exposition plus rigoureuse permettrait de se débarrasser complètement de cette notion de temps.

par définition sont parallèles à Δ. Aucune de ces droites ne peut d'ailleurs couper Δ [1].

Soit AB la perpendiculaire abaissée de A sur Δ ; retournons le plan P sur lui-même de façon que AB ne bouge pas. La droite Δ coïncide avec elle-même et, d'après sa définition, il en est de même de D. Donc, les deux angles de BA avec D sont égaux et AB est perpendiculaire sur D (**189**) ; d'où la construction suivante : *pour mener par* A *la parallèle à* Δ, *on abaisse* AB *perpendiculaire sur* Δ, *et l'on élève en* A *la perpendiculaire à* AB.

Cette nouvelle définition de la parallèle montre que *si* D *est parallèle à* Δ, *de même* Δ *est parallèle à* D. On dit alors sans autre spécification que D et Δ sont parallèles. La distance constante d'un point quelconque de l'une de ces droites à l'autre s'appelle la distance des deux parallèles. Il résulte encore de ceci que, *si deux droites* D *et* Δ *sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre*, et aussi que *deux droites du plan* P *parallèles à* Δ *sont parallèles entre elles* (**209**).

208. — Soit O le milieu d'un segment AB d'une perpendiculaire commune à deux parallèles D et Δ (*fig.* 75). Ces deux parallèles sont symétriques par rapport à O (**196**), comme on le voit en faisant tourner D et OA de deux angles droits autour de O. On en déduit en particulier que toute sécante A'B' passant par O a son milieu en ce point, et que, de plus, les angles OA'A et OB'B sont égaux, ce que l'on peut énoncer : *une sécante quelconque coupe deux parallèles suivant le même angle.*

Fig. 75

Réciproquement, *la symétrique d'une droite* Δ *par rapport à un point* O *est une droite* D *parallèle à* Δ.

[1] On définit parfois la parallèle menée par A à Δ comme une droite ne coupant pas Δ. Avec cette définition, on admet, non plus que la parallèle existe, mais que par un point il ne passe qu'une parallèle à une droite ; c'est le *postulatum d'Euclide*.

Nous avons vu que par tout point A du plan passe une droite D ne coupant pas Δ. Nous allons montrer que c'est la seule, ou, si l'on veut, que *toute droite du plan P passant par A et distincte de D coupe Δ* (*fig.* 76). Menons par un point quelconque A′ de cette droite une parallèle D′ à Δ et considérons les parallèles à Δ : D″, D‴, ... formant avec D et D′ un *réseau de parallèles équidistantes*, c'est-à-dire telles que les segments aa', $a'a''$, $a''a'''$, ..., interceptés par ces droites sur une perpendiculaire commune ab soient égaux.

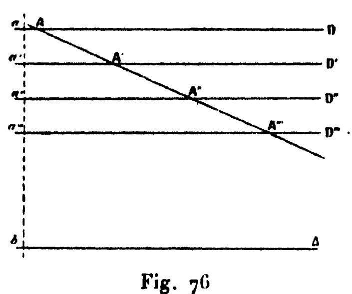


Fig. 76

Δ est forcément comprise entre deux parallèles consécutives du réseau, ou bien confondue avec l'une d'elles, car ceci revient à dire que, si l'on porte sur ab des segments égaux : aa', $a'a''$, $a''a'''$, ... le point b est compris entre deux consécutifs des points a, a', a'', ... ou bien confondu avec l'un d'eux.

La droite considérée AA′ qui coupe D et D′ en A et A′ coupe aussi D″, car la symétrique de D par rapport à A′ étant précisément D″ le symétrique A″ de A par rapport à A′ est sur D″. De même la droite AA′ coupant D′ et D″ en A′ et A″ coupe D‴ en A‴, et ainsi de suite. Coupant toutes les parallèles du réseau, cette droite coupe aussi Δ.

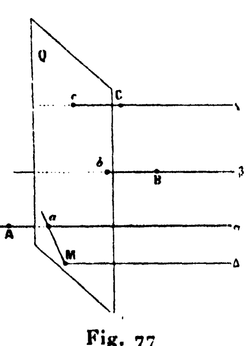
On voit en outre qu'*un réseau de parallèles équidistantes découpe sur une droite quelconque des segments égaux.*

Inversement, *si un réseau de parallèles découpe sur une droite des segments égaux, ces parallèles sont équidistantes.*

209. — Il résulte de la définition qui précède que par chaque point A, B, C,... de l'espace (*fig.* 77) passe une parallèle à Δ et une seule. Chacune d'elles est dans le plan défini par le point correspondant et Δ. Si l'on considère ces divers plans, on peut les faire simultanément glisser sur eux-mêmes, Δ restant en coïncidence avec elle-même. Dans ce mouvement de transla-

tion (**213**), les points A, B, C,... décrivent les parallèles correspondantes α, β, γ,...

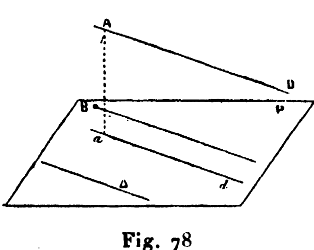
Tout plan Q perpendiculaire à une droite Δ est perpendiculaire à toutes ces parallèles α, β, γ,...


Fig. 77

Soit en effet aM l'intersection du plan P des deux droites Δ et α et du plan Q ; ces deux plans sont rectangulaires, car P passe par la perpendiculaire Δ à Q (**193**). La droite α du plan P perpendiculaire en a à l'intersection aM des deux plans est par suite perpendiculaire à Q. On démontre de même que le plan Q est perpendiculaire à β, γ,... en b, c,... Inversement, il est facile de voir que *plusieurs perpendiculaires à un même plan sont parallèles entre elles.*

Ceci permet de généraliser une propriété déjà établie (**207**) pour les droites d'un même plan : *deux parallèles α, β à une troisième Δ sont parallèles entre elles*, puisque le plan Q perpendiculaire à Δ est aussi perpendiculaire à α d'une part, à β d'autre part.

210. Droites et plans parallèles. — Supposons qu'un plan P (*fig.* 78) glisse sur lui-même de façon que la droite Δ de ce plan reste constamment en coïncidence avec elle-même. Tout point A de l'espace décrit dans cette translation (**213**) une droite D parallèle à Δ. On dit que D est parallèle au plan P ou, ce qui revient au même : *on appelle parallèle à un plan* P *toute parallèle à une droite quelconque* Δ *de ce plan.* En particulier, si A est dans P, la parallèle à Δ est tout entière dans ce plan.


Fig. 78

D *étant parallèle à un plan* P, *toute parallèle à* D *menée par un point* B *du plan* P *est dans ce plan,* puisque cette droite étant parallèle à D l'est aussi à Δ.

Remarquons que tous les points de D sont équidistants du plan P. En effet, quand P glisse sur lui-même, A décrit D et sa projection a sur P décrit une parallèle d à Δ. La distance constante de A au plan P est la distance des deux parallèles D et d. *La projection d'une droite* D *sur un plan parallèle* P *est une parallèle à* D (**195**).

Le nombre des parallèles menées par un point A au plan P est illimité, puisqu'on peut prendre de façon quelconque la droite Δ de ce plan. En particulier, on peut mener par deux points de l'espace des parallèles à P qui ne sont pas parallèles entre elles.

Tout plan passant par une parallèle D *à un plan* P *coupe ce plan suivant une parallèle à* D. Supposons que le plan considéré coupe P, ce qui n'a pas toujours lieu, comme nous le verrons (**211**), et soit B un point de l'intersection (*fig.* 78). La parallèle menée par B à Δ et D est à la fois dans le plan P et dans le plan sécant ; c'est donc leur intersection. Le dièdre de ces deux plans coïncide constamment avec lui-même pendant la translation définie précédemment.

Etant donnés deux plans sécants, toute parallèle à ces deux plans est parallèle à leur intersection, puisque la parallèle à cette droite menée par un point de l'intersection étant à la fois dans les deux plans est confondue avec cette intersection.

211. — Par un point A, il passe, comme nous le savons, un nombre illimité de parallèles au plan P. Soit D (*fig.* 79) l'une d'elles ; projetons A et D en a et d sur P. La droite d étant parallèle à D, on en conclut que D est perpendiculaire sur Aa donc dans le plan Q perpendiculaire à Aa en A. Réciproquement, soit AD′ une droite de ce plan Q ; le plan D′Aa coupe P suivant ad' parallèle à AD′. On voit que *le lieu géométrique des parallèles menées au plan* P *par un point* A *est un plan* Q, *qui est par définition le plan parallèle au plan* P *mené par* A.

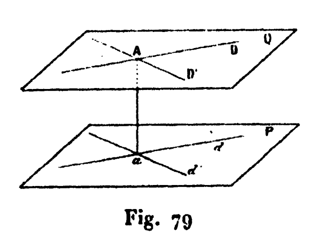


Fig. 79

Nous laissons au lecteur le soin de démontrer que *toute droite perpendiculaire à* P *est aussi perpendiculaire à* Q *et réciproquement.* On en déduit que le plan parallèle à un des deux plans P ou Q, par exemple P, passant par un point de l'autre plan Q, est précisément ce second plan Q. Les deux plans P et plan Q sont dits *équidistants*, parce que la distance d'un point quelconque de Q à P, ou de P à Q, est toujours égale à A*a*. On définirait sans peine un *réseau de plans parallèles équidistants* comme on a défini un réseau de parallèles équidistantes (**208**).

Deux plans Q *et* Q' *parallèles à un troisième* P *sont parallèles entre eux*, puisque toute perpendiculaire à P est aussi perpendiculaire à Q et Q'.

Les sections des deux plans parallèles P *et* Q *par un troisième* R *sont parallèles entre elles* (*fig.* 80). Si l'on mène par un point A commun à Q et R une parallèle à l'intersection MN de P et R, elle est contenue à la fois dans Q et R ; c'est donc l'intersection de ces deux plans.

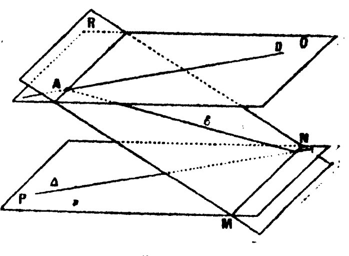


Fig. 80

Tout plan qui coupe un plan P *coupe également un plan quelconque* Q *parallèle au premier.* Prenons un plan R coupant P suivant une droite quelconque MN (*fig.* 80) et prenons en outre un plan sécant auxiliaire quelconque coupant à la fois P, Q, R suivant les droites Δ, D, δ. On sait que Δ et D sont parallèles. La droite δ, qui dans le plan sécant auxiliaire coupe Δ, coupe aussi sa parallèle D (**208**) en un point A qui se trouve ainsi appartenir à R et à Q. Ces deux plans ont donc une droite commune.

On déduit de ceci que : *Si une droite coupe un plan* P, *elle coupe aussi tout plan* Q *parallèle au premier*, et que, *si un plan n'est pas parallèle au plan* P, *il le coupe.*

212. — Le sens des mots *plan horizontal* ou *vertical*, *droite horizontale* ou *verticale* est bien connu. L'application à ces

plans et à ces droites des diverses remarques qui précèdent et de celles qui ont déjà été faites (**195**) donne un grand nombre de propriétés qui pour la plupart sont intuitives.

Toutes les verticales sont parallèles entre elles.

Tous les plans horizontaux sont parallèles entre eux.

Une verticale quelconque est perpendiculaire à un plan horizontal quelconque et à toutes les horizontales qu'elle rencontre.

Deux plans verticaux quelconques ne sont pas en général parallèles. Leur intersection est une verticale.

Deux horizontales quelconques ne sont pas en général parallèles et ne se coupent pas. Si elles se coupent, le plan qu'elles déterminent est un plan horizontal.

Si une droite n'est pas horizontale, elle coupe tous les plans horizontaux. Il passe par cette droite un plan vertical et un seul.

Si un plan n'est pas horizontal, il coupe tous les plans horizontaux. Les sections de deux plans horizontaux par un tel plan sont des horizontales parallèles appelées *horizontales du plan*.

213. Translation. — Si l'on fait subir à une figure quelconque plane ou gauche une translation (**207**, **209**, **317**), les divers points A, B, C, D,... (*fig.* 81) décrivent des parallèles et

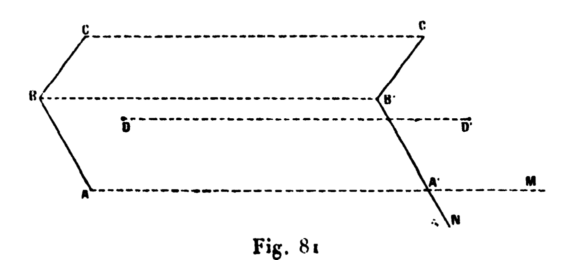


Fig. 81

viennent en A', B', C', D',... Les deux figures obtenues étant superposables, on a AB = A'B' ; BC = B'C' ;... et aussi pour les angles : ABC = A'B'C' ;... De plus les angles tels que MAB et MA'B' sont aussi égaux.

Nous allons démontrer la propriété fondamentale qui suit :

deux droites qui peuvent coïncider par translation sont parallèles. Prenons par exemple les droites AB et A'B'. Faisons tourner AA' et AB dans leur plan de deux angles droits autour du milieu de AA' (**196**). Le point A vient en A' ; de plus, les angles B'A'M et BAA' du plan considéré étant égaux, il en est de même de NA'A et BAA' et par suite AB vient se placer sur le prolongement A'N de A'B'. Les deux droites AB et A'N étant symétriques par rapport au milieu de AA' sont bien parallèles (**208**).

Inversement d'ailleurs, si deux droites A'B' et AB sont parallèles, la translation qui amène A en A' les fait coïncider puisque, après cette translation, AB est devenu une droite passant par A' et parallèle à AB, donc confondue avec A'B'. Cette propriété d'une droite de rester parallèle à elle-même dans toute translation explique l'emploi de l'*équerre* pour le tracé d'une parallèle à une droite (**285**).

Deux plans qui peuvent coïncider par translation sont parallèles. Supposons que ces deux plans soient définis d'une part par les trois points A, B, C, d'autre part par les points A', B', C' se déduisant par translation des trois premiers. Le plan parallèle à ABC, passant par B', devant contenir les deux droites B'A' et B'C' respectivement parallèles à BA et BC (**210**), est confondu avec le plan A'B'C'. On verra de même que deux plans parallèles peuvent coïncider par translation.

214. Angles de parallèles. — Prenons dans un même

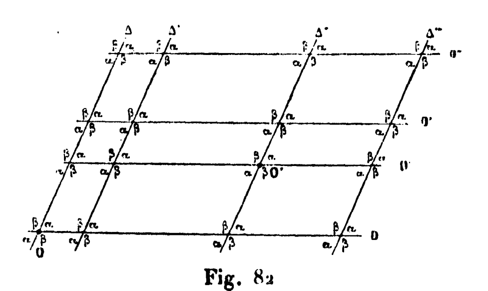


Fig. 82

plan deux réseaux de parallèles (*fig.* 82) D, D', D'', D''',... et Δ, Δ', Δ'', Δ''',... Deux quelconques des points de rencontre

d'une droite D et d'une droite Δ étant O et O', la translation qui amène O en O' fait coïncider les quatre angles formés autour de O avec les quatre angles formés autour de O'. Ces angles sont deux à deux égaux ou supplémentaires (**189**), suivant que l'on compare deux angles aigus ou obtus, ou bien un angle aigu et un angle obtus. De façon plus précise, tous les angles marqués α sur la figure sont égaux, et chacun des angles marqués β est égal au supplément de l'un des angles α. Tous ces angles sont d'ailleurs égaux et droits si l'une des droites D est perpendiculaire à l'une des droites Δ. Cette disposition se trouve par exemple sur le *papier quadrillé* (**141**).

Si deux angles ont les côtés parallèles deux à deux, ils sont égaux ou supplémentaires. Cette propriété, qui résulte de ce qui précède, s'étend au cas où les angles sont dans des plans parallèles. On peut se borner à considérer des angles égaux, si l'on a soin de définir un sens qui soit le même pour toutes les demi-droites parallèles entre elles. Prenons un angle DOΔ (*fig.* 83) sur les côtés duquel on marque un sens à l'aide de flèches. Les demi-droites parallèles aux demi-droites D et Δ menées par O' sont D' et Δ' et les deux angles D'O'Δ' et DOΔ sont certainement égaux et non supplémentaires.

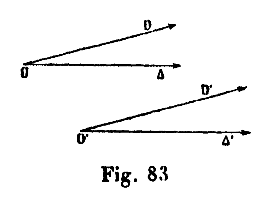


Fig. 83

Si deux angles ont leurs côtés respectivement perpendiculaires, ils sont égaux ou supplémentaires, car, en faisant tourner l'un d'eux de un angle droit autour de son sommet, ses côtés deviennent parallèles à ceux de l'autre. On en déduira que, si deux droites sont perpendiculaires à deux plans donnés, l'angle de ces droites est égal à l'angle des deux plans ou à son supplément.

De même encore, on établira que *deux trièdres* (**201**) *dont les arêtes sont respectivement parallèles et de même sens sont égaux*. En particulier, les dièdres correspondants ont des faces parallèles et sont égaux.

215. — Prenons deux droites de l'espace D et Δ ne se coupant pas (*fig.* 84) et fixons un sens sur chacune d'elles. Par un

point O quelconque menons à ces droites des parallèles Od et $O\delta$: on définit un angle et un seul puisque l'on a fixé un sens sur D et Δ. Cet angle jouit de la propriété remarquable d'avoir la même valeur quelle que soit la position du point O (**214**). On l'appelle par définition l'*angle des deux droites* D *et* Δ. C'est là une généralisation très importante de la notion d'angle. En particulier, deux droites non concourantes sont dites *perpendiculaires* si leur angle est droit et, dans ce dernier cas, il est inutile de fixer un sens sur chacune des droites.

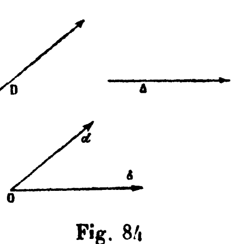


Fig. 84

La plupart des propriétés du chapitre précédent sont encore exactes si l'on attribue au mot « perpendiculaire » le sens qui précède. Pour en donner un exemple, établissons que *si une droite est perpendiculaire sur deux droites non parallèles d'un plan, elle est perpendiculaire à ce plan* (**191**). Soient α, β les deux droites du plan P (*fig.* 85) auxquelles OO_1 est perpendiculaire par hypothèse. Par le pied O de cette perpendiculaire menons les parallèles OA et OB à α et β ; ces deux droites sont dans le plan P et sont perpendiculaires en O à OO_1. Donc, OO_1 étant perpendiculaire à deux droites du plan P passant par son pied est perpendiculaire à ce plan.

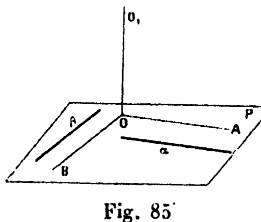


Fig. 85

Cependant quelques énoncés doivent être modifiés. C'est ainsi que par un point on peut mener un nombre illimité de perpendiculaires à une droite et non plus une seule (**192**), ces perpendiculaires étant toutes les droites qui, passant par le point, sont dans le plan perpendiculaire à la droite.

216. Projections. — Si l'on projette en *a*, *b*, *c*, *d*, ... (**195**) divers points de l'espace A, B, C, D, ... sur un plan P (*fig.* 86), les projetantes étant perpendiculaires à ce plan sont toutes parallèles entre elles (**209**). Projetons les mêmes points en a', b',

c', d', ... sur un second plan P′ parallèle au premier ; il est évident que l'on passe de la figure *abcd* ... à la figure *a′b′c′d′*... par la translation qui amène *a* en *a′* (**213**).

Pour étudier la forme d'une figure projetée, on peut donc remplacer le plan de projection par un plan parallèle quelconque.

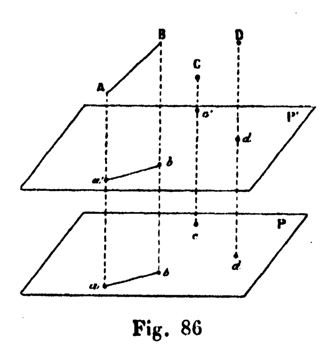


Fig. 86

On en déduit immédiatement les généralisations suivantes de propriétés déjà énoncées (**204**) : *la projection d'un segment sur un plan est plus courte que ce segment. — La projection d'un angle aigu sur un plan parallèle à un côté est plus petite que cet angle ; la projection d'un angle obtus est plus grande que cet angle.* Citons encore l'énoncé suivant qui, au point de vue des applications, est d'une importance considérable : *la projection d'un angle droit sur un plan parallèle à un de ses côtés est un angle droit. Inversement, si un angle droit se projette sur un plan parallèle à l'un de ses côtés suivant un angle droit, c'est qu'il est droit.*

Les projections de deux droites parallèles sur un même plan sont deux droites parallèles, puisque les plans qui les projettent sont parallèles (**211**).

217. — On appelle *angle d'une droite avec un plan* l'angle aigu que fait cette droite AB (*fig.* 87) avec sa projection A*b* sur le plan. Il résulte de ce qui précède que, tout comme l'angle de deux droites ou celui de deux plans, cet angle ne change pas si l'on remplace la droite et le plan par une droite et un plan respectivement parallèles.

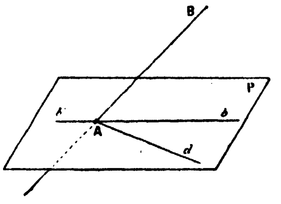


Fig. 87

L'angle d'une droite avec un plan est le plus petit des angles que fait cette droite avec toutes les droites du plan. Pour évaluer l'angle de AB avec une droite quelconque du plan P, ou même avec une parallèle quelconque à ce plan, il

suffit d'évaluer l'angle que fait AB avec la parallèle *d* à cette droite passant par le point A. Cette droite *d* étant dans le plan P, on voit bien que l'angle BA*d* qui se projette en BA*b* sur le plan BA*b* est plus grand que sa projection (**204**). On établirait de façon analogue que l'angle obtus de AB avec la droite *b*A*b* est le plus grand des angles que fait AB avec les droites du plan P, ou les parallèles à ce plan.

Etant donnés deux plans sécants P *et* Q, *la droite de* Q *qui passant par un point* M *fait le plus grand angle avec* P *est la perpendiculaire* MN *abaissée de ce point sur l'intersection des deux plans* (*fig*. 88). Si *m* est la projection de M sur P, la droite N*m* est perpendiculaire sur l'intersection des plans P et Q (**194**). Prenons une autre droite quelconque passant par M telle que MN'; son angle avec P est MN'*m*. Il est bien inférieur à MN*m* puisque MN' et MN sont deux obliques issues de M sur P et que MN' est celle dont le pied N' s'écarte le plus du pied de la perpendiculaire (**204**).

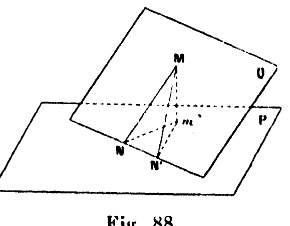


Fig. 88

L'angle MN*m* est, comme on le voit, l'angle rectiligne du dièdre des deux plans P et Q (**191**). Dans le cas particulier où P est un plan horizontal, NN' est une horizontale du plan (**212**) et les droites telles que MN, qui sont perpendiculaires sur ces horizontales et par suite parallèles entre elles, s'appellent les *lignes de plus grande pente* du plan Q, dénomination justifiée par ce qui précède (**298**). Il nous reste maintenant à appliquer aux polygones et aux polyèdres les diverses notions que nous venons d'établir.

218. Angles des polygones et des triangles. — Etant donné dans un plan un polygone convexe quelconque ABCDE, prolongeons les côtés dans un même sens (*fig*. 89) de façon à former les angles numérotés sur la figure : 1, 2, 3, 4, 5. On les appelle des *angles extérieurs* au polygone.

La somme des angles extérieurs à un polygone convexe est

égale à quatre angles droits. Menons par un point O du plan des parallèles aux demi-droites qui forment les côtés du polygone.

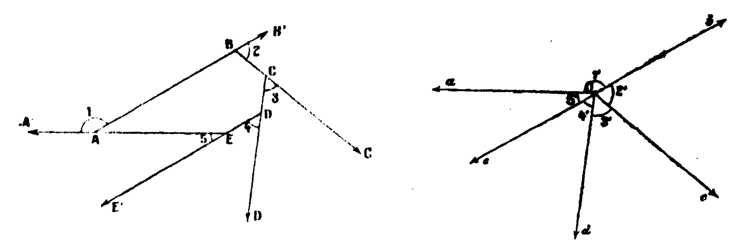


Fig 89

Ces parallèles font des angles 1′, 2′, 3′, 4′, 5′ respectivement égaux aux angles 1, 2, 3, 4, 5 et dont la somme est bien égale à quatre droits (**189**). Ceci permet de calculer la somme des angles intérieurs du polygone. L'angle extérieur en A : BAA′ et l'angle intérieur BAE ont une somme égale à deux droits ; comme il y a ici 5 sommets : A, B, C, D, E, on trouve au total, pour les angles extérieurs et intérieurs, 10 droits. Retranchons de cette somme les 5 angles extérieurs, soit 4 droits, il reste 6 droits pour les angles intérieurs.

Deux cas particuliers, ceux du triangle et du quadrilatère conduisent par un calcul analogue à deux propriétés très importantes.

La somme des quatre angles d'un quadrilatère est égale à quatre angles droits.

La somme des trois angles d'un triangle est égale à deux angles droits.

Nous ne saurions trop insister sur l'importance de ces deux propositions, particulièrement de la dernière. Faisons remarquer que leur démonstration s'appuie sur la propriété admise au début de ce chapitre : le lieu géométrique des points situés à une distance donnée d'une droite est une droite [1] (**207**).

---

[1] On pourrait procéder de façon inverse et établir toute la théorie des parallèles en admettant par exemple que, si dans un quadrilatère trois angles sont droits, il en est de même du quatrième, ce qui revient à admettre que les rectangles existent, fait que vérifie l'observation journalière, tout au moins de façon approximative.

219. — **Signalons quelques conséquences immédiates de ces propositions.**

Si, dans un quadrilatère, deux angles sont supplémentaires, il en est de même des deux autres. Quand les angles supplémentaires sont opposés, nous verrons que le quadrilatère est *inscriptible* (**232, 235**). Quand ces deux angles sont adjacents à un même côté le quadrilatère a deux côtés parallèles; c'est un *trapèze*.

Si, dans un quadrilatère, trois angles sont droits, il en est de même du quatrième. Le quadrilatère est alors un *rectangle* (**221**).

Dans un triangle quelconque, un angle extérieur est égal à la somme des deux angles intérieurs qui ne lui sont pas adjacents.

Dans un triangle équilatéral (**197, 259**), *chaque angle vaut* $\frac{2}{3}$ *d'angle droit, ou* $66^{\gamma}\frac{2}{3}$, *ou* 60°.

Dans un triangle rectangle, les deux angles aigus ont une somme égale à un angle droit. On dit qu'ils sont *complémentaires*.

Dans un triangle rectangle isocèle, les angles aigus sont égaux à un demi-angle droit, ou 50^{γ}, *ou* 45° (**197**).

220. Parallélogrammes. — Un quadrilatère dont deux côtés opposés sont parallèles est un *trapèze*. S'il en est de même des deux autres côtés, comme cela arrive fréquemment en pratique, on a un *parallélogramme*. L'étude des réseaux de parallèles (**214**) nous a déjà montré que dans un parallélogramme ABCD (*fig.* 90) les deux angles aigus B et D sont égaux, ainsi d'autre part que les deux angles obtus A et C, qui sont d'ailleurs supplémentaires des premiers.

Menons la *diagonale* AC ; le symétrique du parallélogramme par rapport au milieu O de AC est le parallélogramme lui-même, les parallèles AD et CB s'échangeant (**208**), ainsi que AB et CD. On en déduit que la seconde diagonale BD a aussi son milieu en O et que les côtés opposés du parallélogramme sont égaux : AB = DC ; AD = BC.

Le point O s'appelle le *centre* du parallélogramme. En défini-

tive on voit que, *dans un parallélogramme les côtés opposés sont deux à deux égaux et parallèles ; les angles sont deux à deux égaux ou supplémentaires ; les diagonales se coupent en leur*

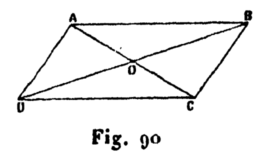


Fig. 90

milieu. On énonce parfois la première de ces propriétés en disant : *deux parallèles comprises entre deux autres parallèles sont égales.*

Il est aisé de voir que *si, dans un quadrilatère, deux côtés opposés* AB *et* DC *sont égaux et parallèles, le quadrilatère est un parallélogramme.* Menons en effet AC. Une rotation de deux angles droits autour du milieu O de AC, amène AB sur CD et réciproquement. Donc AD et BC sont symétriques par rapport à O et par suite parallèles. En remarquant que les deux triangles ABC et ADC sont égaux (**198**), le lecteur établira sans peine que *si, dans un quadrilatère, les côtés opposés sont deux à deux égaux :* AB = DC *et* AD = BC, *le quadrilatère est un parallélogramme.*

221. — Le *rectangle* est un parallélogramme dont les côtés non parallèles sont rectangulaires. Il a quatre angles droits (**219**). La perpendiculaire $x'x$ au milieu de AB (*fig.* 91) est un axe de symétrie de la figure (**196**), c'est-à-dire que A et B s'échangent ainsi que C et D si l'on fait tourner la figure de deux dièdres droits autour de $x'x$. On en déduit que $x'x$ est aussi perpendiculaire au milieu de CD. Cet axe passe par le centre O du rectangle. *Les deux*

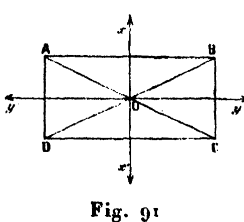


Fig. 91

diagonales d'un rectangle sont égales, puisqu'elles s'échangent dans cette symétrie. Il y a un autre axe de symétrie pour la figure qui est la perpendiculaire $y'y$ au milieu de AD.

On déduit de ce qui précède que, *dans un triangle rectangle quelconque* ABD, *la médiane* AO *issue du sommet de l'angle droit est égale à la moitié de l'hypoténuse* (**235**). Il suffit en effet de mener par B et D des parallèles aux deux côtés de l'angle droit pour former un rectangle ABCD, dans lequel la propriété devient évidente. Les deux triangles AOB, AOD en lesquels se trouve décomposé le triangle rectangle ABD sont isocèles.

On verra de même que, si l'on porte des longueurs égales OA = OB = OC = OD sur deux sécantes AC et BD se coupant en O, le quadrilatère dont les quatre sommets sont A, B, C, D est un rectangle.

Le *losange* est un parallélogramme dont les côtés sont tous égaux : AB = BC = CD = DA (*fig.* 92). La perpendiculaire au milieu de BD, base des triangles isocèles DAB et DCB, passe en A et en C (**197**). Donc *les deux diagonales sont perpendiculaires*. Ce sont d'ailleurs deux axes de symétrie du losange.

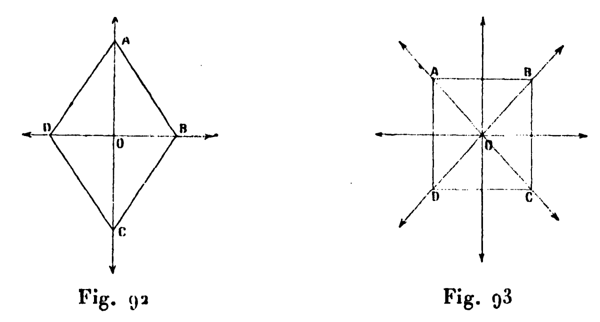


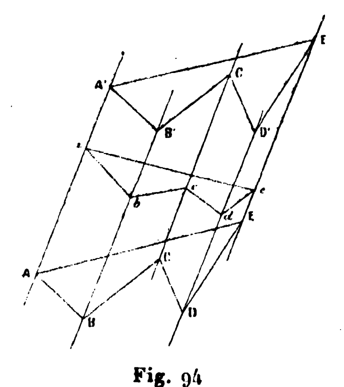
Fig. 92 Fig. 93

Inversement, si dans un parallélogramme les diagonales sont rectangulaires, le parallélogramme est un losange.

Le *carré* (**259**) est un parallélogramme dont les quatre côtés sont égaux et les quatre angles droits. C'est un losange et un rectangle. Un carré a quatre axes de symétries passant par son centre O (*fig.* 93). Chaque diagonale découpe le carré en deux triangles rectangles isocèles (**197**).

222. Prismes et parallélépipèdes. — Prenons un polygone plan ou gauche, convexe ou non (**197**), ABCDE (*fig.* 94)

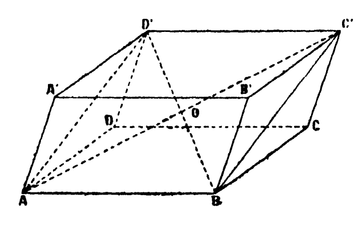
et supposons qu'il se déplace par translation (213); les sommets décrivent des parallèles AA′, BB′, CC′, DD′, EE′. La surface engendrée par les côtés de ce polygone s'appelle une *surface prismatique*. Les plans formant ses faces sont tous parallèles à AA′. Si le polygone considéré est plan, ABCDE s'appelle une *section plane* de la surface prismatique. Après la translation, ce même polygone donne en A′B′C′D′E′ une nouvelle section plane.


Fig. 94

Deux sections d'une surface prismatique par des plans parallèles sont égales, puisqu'on peut les faire coïncider par une translation convenable parallèle aux arêtes de la surface prismatique (213). On appelle *section droite* toute section, telle que *abcde*, dont le plan est perpendiculaire aux arêtes. *Toutes les sections droites sont égales.* D'après sa définition même, le polygone *abcde* est la projection sur son plan de toute autre section de la surface prismatique.

On appelle *prisme* le polyèdre compris entre une surface prismatique et deux sections planes parallèles. Le polyèdre ABCDE A′B′C′D′E′ est un prisme pentagonal, ayant pour *base* un pentagone : ABCDE ou A′B′C′D′E′. Lorsque la base est une section droite, on a un *prisme droit*.

223. — Un prisme ABCD A′B′C′D′ (*fig.* 95) à base parallélogramme s'appelle un *parallélépipède*. Toutes ses faces sont des parallélogrammes et l'on a par suite : AB = DC = A′B′ = D′C′ ou AD = BC = A′D′ = B′C′ ou enfin AA′ = BB′ = DD′ = CC′. Les droites AC′, BD′, CA′, DB′ sont les *diagonales*. Il ne faut pas les confondre avec les diagonales des faces.


Fig. 95

On voit que le même parallélépipède peut être engendré, non seulement par la translation du parallélogramme ABCD parallèlement à AA′, mais aussi par la translation du parallélogramme ABB′A′ parallèlement à AD, ou encore du parallélogramme ADD′A′ parallèlement à AB. Il suffit de se donner trois arêtes concourantes AB, AD, AA′ pour que le parallélépipède soit complètement déterminé.

Les diagonales d'un parallélépipède se coupent en leur milieu. Prenons en effet deux diagonales quelconques AC′ et BD′. Ce sont des diagonales du parallélogramme ABC′D′. Elles se coupent donc en leur milieu O (**220**). Ce point s'appelle le *centre* du parallélépipède.

Si deux des angles DAB, DAA′, A′AB que forment deux à deux les trois arêtes sont droits, par exemple DAA′ et A′AB, l'arête AA′ est perpendiculaire sur le plan de la base ABCD (**191**); on a un *parallélépipède droit*. Si les trois angles sont droits, c'est-à-dire si le trièdre ABDA′ est trirectangle (**201**), on a un *parallélépipède rectangle* (*fig.* 96).

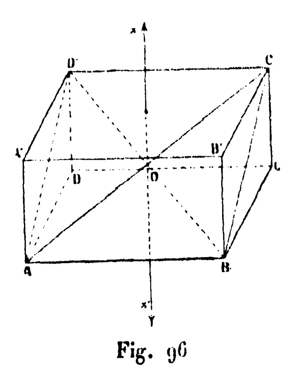


Fig. 96

Dans un parallélépipède rectangle, toutes les diagonales sont égales. C'est ainsi que l'on a AC′ = BD′ dans le rectangle ABC′D′ (**221**). Un tel parallélépipède admet comme axes de symétrie (**196**) chacune des droites telles que zz' menées par son centre O parallèlement aux arêtes.

On appelle *rhomboèdre* un parallélépipède dont toutes les arêtes sont égales. On a alors AB = AD = AA′. Toutes les faces sont des losanges.

Le *cube* est un parallélépipède rectangle dont les arêtes sont égales. C'est aussi un rhomboèdre. Toutes ses faces sont des carrés. Un cube admet comme axes de symétrie les parallèles menées par son centre aux arêtes et aux diagonales des faces.

224. Applications. — Comme nous l'avons fait pour le dernier chapitre, nous donnerons quelques applications simples des propriétés qui précèdent.

Le lieu géométrique des points d'un plan situés à une distance donnée d'une droite Δ *de ce plan est formé de deux parallèles à* Δ. Elles sont d'ailleurs de part et d'autre de Δ qui sert d'axe de symétrie à la figure (**238**).

Le lieu géométrique des points situés à une distance donnée d'un plan donné est formé de deux plans parallèles à ce plan et situés de part et d'autre (**211**).

Le lieu géométrique des milieux des segments découpés sur des sécantes quelconques par deux droites ou deux plans parallèles est une droite ou un plan parallèle aux deux premiers. Prenons par exemple le cas de deux droites D, D′ (*fig.* 97).

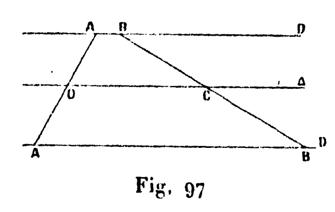


Fig. 97

Par le milieu O d'un segment AA′ menons une parallèle Δ à ces droites. Les trois droites D, Δ, D′ font partie d'un réseau de parallèles équidistantes (**208**) puisque AO = OA′, et par suite, pour toute autre sécante BCB′, on a BC = CB′. En particulier, *dans un trapèze* ABB′A′ *la droite qui joint les milieux* O *et* C *des deux côtés non parallèles est parallèle aux autres côtés* (**246**).

Si B′ est confondu avec A′, le trapèze est un triangle ce qui démontre l'énoncé : *dans un triangle la droite qui joint les milieux de deux côtés est parallèle au troisième côté.* Nous verrons en outre que cette parallèle au troisième côté est égale à la moitié de ce côté (**246**).

Inversement, *la parallèle à un côté* BC *d'un triangle passant par le milieu d'un côté* AB *passe aussi par le milieu du côté* AC comme on le verra aisément.

Dans un triangle ABC, *les trois médianes* AA′, BB′, CC′ *sont concourantes. Leur point* G *de concours est au tiers de chacune d'elles à partir du côté correspondant* (*fig.* 98). Menons par B, C et par les milieux B′, C′ de AC et AB des parallèles à la médiane AA′. On a ainsi un réseau de parallèles équidistantes (**208**) ;

en effet ces droites découpent sur BC des segments égaux, car BA′ = A′C par hypothèse et de plus les parallèles C′E et B′D à AA′ passent aux milieux de BA′ et A′C. Si l'on coupe ce réseau de parallèles équidistantes par une même sécante BB′, on a des segments égaux BF = FG = GB′, ce qui prouve que G est au tiers de BB′. On établirait de même qu'il est au tiers de AA′ et par suite de CC′. Ce point G s'appelle *centre de gravité* du triangle (**206**).

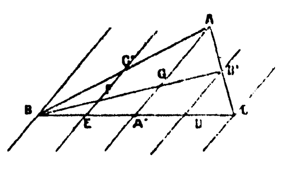


Fig. 98

Si, par les trois sommets d'un triangle ABC (*fig.* 99), on mène des parallèles $\beta A\gamma$, $\gamma B\alpha$, $\alpha C\beta$ aux côtés opposés, les diagonales $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ des parallélogrammes $AB\alpha C$, $ABC\beta$, $ACB\gamma$ sont les médianes du triangle ABC. Ce triangle $\alpha\beta\gamma$ a ses côtés parallèles à ceux du triangle ABC et deux fois plus grands. Si l'on remarque que les perpendiculaires aux milieux des côtés de $\alpha\beta\gamma$ sont en même temps les hauteurs du triangle ABC, on voit que (**206**) : *dans un triangle, les trois hauteurs sont concourantes*; leur point de concours H s'appelle l'*orthocentre* du triangle. Il est facile de vérifier que les triangles BCH, CAH, ABH admettent respectivement A, B, C pour orthocentre. Les quatre points A, B, C, H tels que chacun d'eux soit l'orthocentre du triangle des trois centres forment un *groupe orthocentrique*.

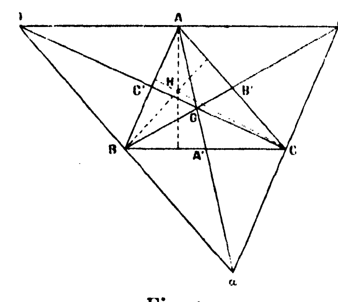


Fig. 99

Exercices. — Nos 167, 295, 296, 297, 298, 299, 300, 301, 302, 303, 304, 305, 306, 307, 308, 309, 310, 311, 312, 313, 314, 315, 316, 317, 318, 319, 320, 429, 432, 449.

CHAPITRE III

CIRCONFÉRENCE ET SPHÈRE

225. Circonférence. — Le lieu géométrique des points A d'un plan P situés à une distance donnée, appelée *rayon*, d'un point O de ce plan (*fig.* 100) est une circonférence de cercle, de *centre* O. La portion du plan intérieure à cette courbe s'appelle cercle. On emploie, en pratique, indifféremment les mots *circonférence* ou *cercle* pour désigner ce lieu. Les points du plan plus voisins de O que les points du lieu sont à l'intérieur de cette circonférence; les autres sont à l'extérieur. On trace habituellement les cercles avec un *compas* (**282**).

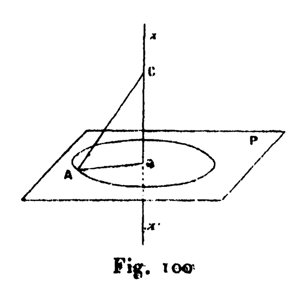


Fig. 100

La perpendiculaire OC au plan du cercle menée par son centre s'appelle l'*axe du cercle*. Cette même circonférence est le lieu des points A de P situés à une même distance d'un point C quelconque de l'axe (**197**). Cette distance CA est d'ailleurs supérieure à la distance CO du point C au plan P.

Le cercle est une courbe *convexe*, c'est-à-dire qu'une droite Δ de son plan (*fig.* 101) ne peut le couper en plus de deux points, car on ne peut mener par O que deux obliques OA et OB égales au rayon de ce cercle. Une droite ne coupe un cercle

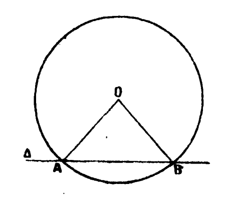


Fig. 101

que si la distance du centre à cette droite est plus petite que le rayon.

226. — Le cercle a des propriétés remarquables analogues à celles dont jouit la ligne droite (**188**) : *un cercle peut coïncider avec lui-même par retournement ou encore par glissement.* De façon plus précise : 1° le symétrique (**196**) d'une circonférence par rapport à un *diamètre* quelconque AOB (*fig.* 102) est cette circonférence elle-même, les deux demi-circonférences AMB et AM′B s'échangeant dans cette symétrie ; 2° un mouvement de rotation (**196**) d'un cercle autour de son axe le laisse constamment en coïncidence avec lui-même. On peut déduire de ces propriétés un grand nombre de conséquences remarquables.

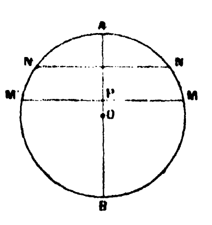


Fig. 102

Prenons un point M et son symétrique M′ par rapport à un diamètre AOB quelconque. La *corde* MM′ sous-tend deux *arcs*, l'un MAM′ inférieur à une demi-circonférence et l'autre MBM′ supérieur. Il résulte immédiatement de la symétrie de la figure que *si deux points* M *et* M′ *sont symétriques par rapport à un diamètre* AB, *ce diamètre passe par les milieux des arcs* MAM′ *et* MBM′ *et est perpendiculaire à la corde* MM′ *en son milieu* P. AB répond donc à cinq conditions : passer par le point O ; par le milieu A de MAM′ ; par le milieu B de MBM′ ; par le milieu P de MM′, et enfin être perpendiculaire sur MM′. Le lecteur vérifiera que deux quelconques d'entre elles suffisent à entraîner les autres.

Prenons dans la même circonférence deux cordes parallèles MM′ et NN′. Le diamètre AB étant perpendiculaire sur NN′ (**207**), on en déduit que N et N′ sont symétriques par rapport à AB et que par suite les arcs symétriques MN et M′N′ sont égaux : *deux parallèles interceptent sur une circonférence des arcs égaux.* Remarquons qu'une parallèle à MM′ ne coupe la circonférence que si le point où elle rencontre AB est compris entre A et B. Nous examinerons un peu plus loin (**229**) le cas où cette droite est perpendiculaire en A ou B à AB.

227. — Prenons maintenant un arc quelconque AB (*fig.* 103) et faisons-lui subir une rotation d'un angle α (**196**), il vient en CD ; les deux arcs AB et CD pouvant être superposés sont égaux. Cette superposition montre en outre que les *angles au centre* AOB et COD sont égaux, que les cordes AB et CD sont égales et enfin que leurs distances au centre : OP et OQ sont aussi égales. Donc, *deux arcs égaux d'une même circonférence sont sous-tendus par des cordes égales, équidistantes du centre et sont vus de ce centre sous des angles égaux.* On pourrait encore obtenir la coïncidence des arcs AB et CD, en remarquant que la figure est symétrique par rapport au diamètre passant par le milieu M de l'arc BC, mais B se superposerait à C et non plus à D et de même A à D et non plus à C.

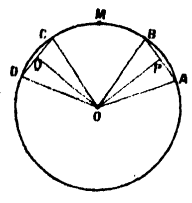


Fig. 103

Inversement, si l'on se donne deux arcs AB et CD tels que les angles au centre AOB et COD soient égaux, il est évident que les arcs sont aussi égaux. Si les deux cordes AB et CD sont égales, les triangles isocèles AOB et COD sont égaux (**198**) et par suite les arcs AB et CD sont égaux. Il en est encore de même si ces deux cordes sont équidistantes du centre.

Etudions ce qui se passe lorsque les arcs sont inégaux et par suite les cordes inégales. Prenons deux arcs que nous pouvons supposer de même origine (*fig.* 104) AC, AD, chacun d'eux étant inférieur à une demi-circonférence. L'arc AD étant plus grand que l'arc AC, nous allons voir que la corde AD est de même plus grande que la corde AC. Le cercle de centre A et de rayon AD recoupe la circonférence donnée en D' symétrique de D par rapport au diamètre AB et en ce point seulement comme nous le verrons (**232**). Le point C situé sur l'arc DAD' est par suite intérieur à ce cercle, ce qui donne bien AD > AC. Quand aux distances OP, OQ de ces deux cordes au centre, on a inversement OQ > OP. Si, en effet, M est le point de rencontre de

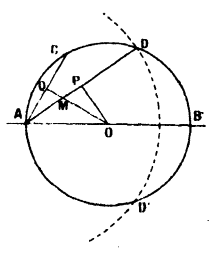


Fig. 104

OQ avec AD, on a successivement : OP $<$ OM $<$ OQ (**204**).

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que les réciproques de ces diverses propositions sont exactes, ce qui nous conduit aux énoncés : *si l'on prend dans une même circonférence des arcs inégaux, inférieurs à une demi-circonférence, le plus grand arc correspond à la plus grande corde, au plus grand angle au centre et à la corde la plus voisine du centre. Inversement, le plus grand angle au centre, ou la plus grande corde, ou la corde la plus voisine du centre correspondent au plus grand arc.* En particulier, on voit que les diamètres sont les plus grandes cordes, ce qui peut d'ailleurs s'établir de façon plus rapide.

228. Sphère. — Le lieu géométrique des points de l'espace situés à une distance donnée d'un point C est une *sphère*. La surface de cette sphère sépare les points de l'espace en deux catégories, suivant que leur distance au centre est plus petite ou plus grande que le rayon. Tous les points du lieu situés dans un plan A donné, sont, comme nous l'avons vu (**225**), sur un cercle Γ dont l'axe passe par le centre de la sphère (*fig.* 105). Donc : *toute section plane de la sphère est un cercle,* pourvu cependant que le plan sécant soit à une distance Cc de C inférieure au rayon. Lorsque le plan sécant passe par le centre C, le cercle de section s'appelle un *grand cercle ;* il a alors même rayon que la sphère. Le plan d'un grand cercle partage la sphère en deux parties égales.

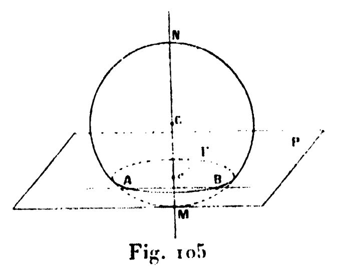


Fig. 105

La sphère est une surface *convexe*, une droite ne la coupant qu'en deux points au plus. La sphère jouit de propriétés analogues à celle du cercle (**226**) : elle coïncide avec elle-même après une rotation quelconque autour d'un de ses diamètres. En particulier tout diamètre peut être considéré comme un axe de symétrie (**196**). De là découlent les propriétés suivantes que le lecteur établira sans peine.

Tous les points A *d'un cercle* Γ *de la sphère sont équidistants de l'un quelconque des points* M *ou* N *où l'axe du cercle perce la sphère* (*fig.* 105) ; M et N sont les *pôles* du cercle Γ. Ceci permet de tracer un cercle Γ sur une sphère supposée réalisée matériellement à l'aide d'un compas dont une pointe est en M. Il est commode d'utiliser pour cela un compas à branches courbes ou *compas sphérique*.

Le plan perpendiculaire au milieu d'une corde AB *de la sphère passe par le centre* C *de la sphère*. Un tel plan est perpendiculaire au milieu de toutes les cordes parallèles à AB.

Deux plans parallèles coupent une sphère suivant des cercles de même axe. On appelle *zone* la portion de surface de la sphère comprises entre ces deux plans et *segment sphérique* la portion du volume de la sphère comprise entre ces mêmes plans. On en déduit que le lieu des centres des cercles d'une sphère situés dans des plans parallèles à un plan fixe est le diamètre perpendiculaire à ce plan fixe. Tous ces cercles ont les mêmes pôles. C'est ainsi que sur la sphère terrestre les deux cercles polaires et les deux tropiques découpent cinq zones. Les pôles de ces divers cercles sont le pôle Nord et le pôle Sud (**304**).

Deux cordes égales sont vues du centre sous le même angle et en sont à la même distance. Si deux cordes sont inégales, la plus grande est vue du centre sous le plus grand angle et est la plus voisine du centre.

Deux cercles de même rayon tracés sur une même sphère sont dans des plans équidistants du centre. Si les rayons sont inégaux, le cercle de plus grand rayon est dans le plan le plus voisin du centre.

229. Tangentes et plans tangents. — On appelle *tangente* (**153**) en un point A d'une courbe C (*fig.* 106) la position limite d'une sécante AB joignant ce point à un point voisin B, quand ce point se rapproche de plus en plus de A. Le point A est le *point de contact* de la tangente.

Si la courbe est une circonférence, il est aisé d'avoir cette position limite en remarquant que la perpendiculaire abaissée

du centre O sur la corde AB passe au milieu C de AB; à la limite, quand B tend vers A, il en est de même du milieu de AB; donc : *la tangente* AT *en un point* A *d'une circonférence est la perpendiculaire à l'extrémité du rayon* OA *de ce point.*

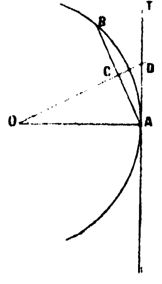


Fig. 106

C'est là une propriété très importante au point de vue des applications. Prenons un point quelconque D de cette tangente; la perpendiculaire OA étant plus courte que l'oblique OD, on voit que D est extérieur à la circonférence. La tangente en A n'a donc que ce seul point A commun avec la circonférence. On peut remarquer encore que la tangente en A est parallèle aux cordes que le diamètre du point A partage en deux parties égales (**226**).

On appelle *enveloppe* d'une droite variable une courbe à laquelle la droite reste tangente dans toutes ses positions. Si la droite considérée passe par un point fixe, on dit parfois que ce point est l'enveloppe de ces droites. Il résulte de cette définition que le cercle est l'enveloppe de ses tangentes. En remarquant que la distance OA du centre O à une tangente AT est constante, on peut encore dire : *l'enveloppe des droites d'un plan situées à une distance constante d'un point fixe est un cercle ayant ce point pour centre.*

De même, *l'enveloppe des cordes d'un cercle qui sous-tendent des arcs égaux est un cercle concentrique au premier,* puisque ces cordes sont à la même distance du centre (**227**). On peut remarquer que ce second cercle est aussi le lieu géométrique des milieux des cordes considérées.

Voici enfin un dernier énoncé facile à établir : *le lieu des centres des cercles tangents aux deux côtés d'un angle est formé des bissectrices de cet angle.* En particulier dans un triangle, les points de concours des bissectrices prises trois à trois (**206**) sont centres de cercles tangents aux trois côtés. Celui qui est intérieur au triangle s'appelle *cercle inscrit,* les autres cercles sont *ex-inscrits.*

230. — Prenons maintenant un point A sur une surface quelconque (*fig.* 107) et par ce point faisons passer une courbe arbitraire Γ. En général, cette courbe admet au point A une tangente AT qui par définition est *tangente à la surface*. Il y a un nombre illimité de courbes passant par A. On démontre qu'en général les tangentes à ces diverses courbes en ce point sont dans un même plan que l'on appelle le *plan tangent* à la surface. Le point A est le point de contact de ce plan tangent. Nous démontrerons l'existence de ce plan tangent pour toutes les surfaces que nous aurons à considérer (**239**).

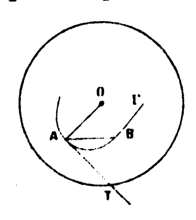


Fig. 107

Si nous supposons que la surface soit une sphère, la droite joignant O au milieu d'une corde AB étant constamment perpendiculaire sur AB ; à la limite, quand B se rapproche de A, on voit que OA est perpendiculaire sur AT. On en déduit que, *en un point A d'une sphère, toutes les tangentes à la sphère sont dans un plan perpendiculaire en A au rayon de ce point.* En particulier, ce plan contient toutes les tangentes aux cercles de la sphère qui passent par A.

Le plan tangent en A à la sphère n'a en commun avec la sphère que son point de contact ; sa distance au centre de la sphère est OA, ce que l'on peut énoncer : *l'enveloppe des plans situés à une distance fixe d'un point donné est une sphère ayant ce point pour centre* (**228**). On donne ici au mot « enveloppe » un sens analogue à celui que l'on a défini pour les droites d'un plan. On en déduit encore que *l'enveloppe des plans découpant sur une sphère des cercles de même rayon est une sphère concentrique à la première*, sphère qui est aussi le lieu des centres de ces cercles.

231. — On appelle *normale* à une courbe plane ou gauche Γ toute perpendiculaire en un point A à la tangente AT de ce point (*fig.* 108). Les normales en A sont donc toutes les droites passant par A dans le plan perpendiculaire à la tangente (**191**), ou *plan normal* en A à la courbe.

Si Γ est un cercle, il est aisé de voir que toutes les normales telles que AN coupent l'axe Oz de ce cercle, le plan normal étant le plan déterminé par cet axe et le rayon OA. Lorsqu'il s'agit, comme ici, d'une courbe plane, le mot « normale » est réservé plus spécialement, sauf spécification contraire, à celle de ces normales qui est dans le plan de la courbe. On voit par suite que la normale en un point A d'un cercle est le rayon OA de ce point. Toutes les normales au cercle passent donc par le centre de ce cercle.

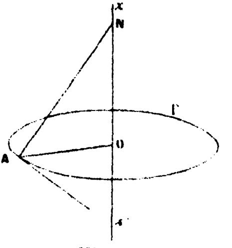


Fig. 108

Etant donnés un cercle et un point M de son plan (*fig.* 109), on peut mener par ce point M deux normales au cercle : MA et MA′. De même, le point N intérieur au cercle donne les normales NA et NA′. *La plus courte distance d'un point fixe à un point quelconque d'une circonférence est la plus petite des deux normales que l'on peut mener de ce point à ce cercle ; la plus longue est la plus grande de ces deux normales.* On a par exemple : MA < MB < MA′, car, dans le triangle MOB, les inégalités MO — OB < MB < MO + OB (**205**) peuvent s'écrire MO — OA < MB < MO + OA ou MA < MB < MA′.

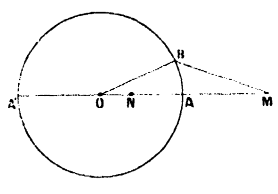


Fig. 109

En tout point d'une surface, on appelle *normale* la perpendiculaire au plan tangent. Elle est perpendiculaire à toutes les tangentes passant par ce point (**191**).

Remarquons qu'en un point d'une surface il y a une infinité de tangentes formant le plan tangent et une seule normale, tandis qu'en un point d'une courbe il y a une tangente et une infinité de normales, formant le plan normal.

Il est aisé de voir que, *en un point d'une sphère la normale est le rayon de ce point.* Par un point non situé sur une sphère, on peut toujours mener deux normales à cette sphère, en joignant ce point au centre. On démontre, comme pour le cercle, que *le*

plus court chemin d'un point de l'espace à un point d'une sphère est la plus petite des deux normales que l'on peut mener de ce point à la sphère; le plus long est la plus grande de ces deux normales.

232. Intersection de cercles ou de sphères. — Cherchons combien il faut de points pour déterminer une circonférence. Par un point A, il passe évidemment un nombre illimité de cercles, le centre d'un tel cercle pouvant être pris en un point quelconque de l'espace. Si l'on se donne deux points A et B, il y a encore un nombre illimité de cercles, le centre de l'un quelconque d'entre eux devant être pris dans le plan perpendiculaire au milieu de AB (**206**). Si l'on se borne aux cercles situés dans un plan donné, les centres doivent être sur une droite Δ (*fig.* 110) qui est un axe de symétrie pour la figure (**196**). On dit que ces cercles forment un *faisceau de cercles.* Nous verrons que AB est leur axe radical commun. (**254**).

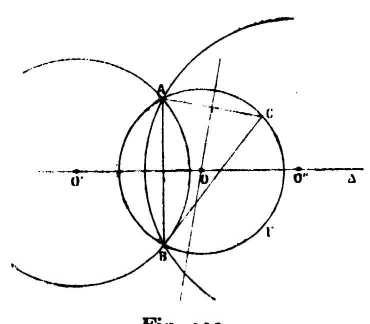


Fig. 110

Si l'on se donne, non plus deux points, mais trois : A, B, C non en ligne droite, il y a un cercle et un seul passant par ces trois points puisque le centre, qui est dans le plan de ces points, doit être sur la perpendiculaire au milieu de AB et sur la perpendiculaire au milieu de AC, ce qui détermine toujours un point O, et un seul. Le cercle Γ qui passe par les trois sommets du triangle ABC est dit *circonscrit* à ce triangle (**206**). Si enfin, on se donne quatre points A, B, C, D, même situés dans un même plan, il ne sont pas en général sur un même cercle, D n'étant pas sur le cercle déterminé par les trois points A, B, C. Si ceci a lieu, on dit que le quadrilatère ABCD est *inscriptible* (**235**).

On démontrerait de façon complètement analogue que par un point A de l'espace passent des sphères en nombre illimité,

dont le centre peut être pris arbitrairement. Les sphères passant par deux points A, B ont leur centre dans le plan perpendiculaire au milieu de AB (**206**). Les sphères passant par trois points A, B, C non en ligne droite forment un *faisceau de sphères*. Toutes ces sphères passent par le cercle circonscrit au triangle ABC et leurs centres sont sur l'axe de ce cercle (**228**), Par quatre points A, B, C, D non situés dans un même plan, passe une sphère et une seule, qui est dite *circonscrite* au tétraèdre des quatre points. En général, par cinq points A, B, C, D, E il ne passe pas de sphère.

233. — Deux circonférences quelconques d'un même plan peuvent évidemment ne pas se couper ; elles peuvent être extérieures l'une à l'autre, ou bien la plus petite peut être complètement contenue à l'intérieur de la plus grande. Si elles se coupent, elles ont en commun deux points au plus, puisque nous venons de voir que par trois points il passe une circonférence et une seule. Enfin il résulte de ce qui précède (**226**) que, si deux circonférences se coupent en un point A, elles se coupent aussi au point A′ symétrique de A par rapport à la ligne des centres, ou encore que *si deux circonférences se coupent en deux points, ces deux points sont symétriques par rapport à la ligne des centres*. Les divers cas de figure sont représentés ci-contre (*fig.* 111). On a supposé que le cercle de centre O′ est plus

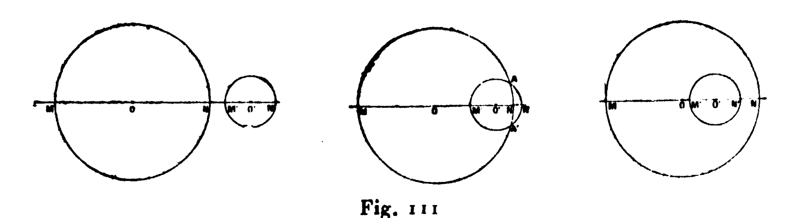


Fig. 111

petit que le cercle de centre O. Pour distinguer les divers cas, il suffit de remarquer que les deux circonférences ne peuvent se couper que si l'on peut construire un triangle OO′A dont les trois côtés sont : la distance des centres OO′, et les deux rayons OA, O′A′. *La condition nécessaire et suffisante pour que deux*

cercles d'un même plan se coupent est que la distance des centres soit plus petite que la somme des rayons et plus grande que leur différence.

Il y a des cas particuliers dans lesquels les circonférences (*fig.* 112) ont un seul point commun A, qui est alors forcément sur la ligne des centres. La tangente AT en A est la même pour les deux cercles (**229**). On a alors deux *circonférences tangentes*. Elles sont tangentes extérieurement dans le premier cas de figure, intérieurement dans le second.

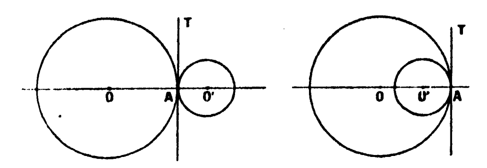


Fig. 112

Si les deux circonférences ne sont pas dans un même plan, il est facile de voir qu'elles peuvent avoir deux points communs; dans ce cas leurs axes se rencontrent et elles peuvent être placées sur une même sphère; elles peuvent n'avoir qu'un point commun, sans que la tangente aux deux circonférences en ce point soit forcément la même; enfin elles peuvent n'avoir aucun point commun.

Le lecteur établira, par des raisonnements analogues à ceux qui précèdent, que *deux sphères qui se coupent ont en commun un cercle ayant pour axe la ligne des centres*. Ceci a lieu seulement si la distance des centres est plus petite que la somme des rayons et plus grande que leur différence. Enfin deux sphères peuvent être tangentes, le point de contact étant alors un point de la ligne des centres et le plan tangent étant le même en ce point pour les deux sphères (**230**).

234. Mesure des angles. — La mesure des angles dans le plan (**162, 189**) est intimement liée à celle des arcs de circonférence.

Rappelons que, pour mesurer une grandeur (**35**), on la compare habituellement à une autre grandeur de même espèce prise

pour unité, en cherchant combien de fois l'unité ou une de ses subdivisions est comprise dans la grandeur à évaluer. En pratique, on prend successivement le dixième, le centième,..... d'unité et lorsque les subdivisions essayées sont assez petites, on admet qu'elles sont contenues un nombre exact de fois dans la grandeur à mesurer, même quand cela n'a pas lieu exactement. L'erreur commise (**52**) est en tous cas inférieure à la plus petite des subdivisions considérées. L'application de ces procédés de mesure à des longueurs ou à des angles est bien connue ; ils peuvent de même s'appliquer à des arcs d'une même circonférence, puisque l'on peut définir l'égalité, la somme et la différence de tels arcs.

Nous avons vu que des angles au centre égaux correspondaient à des arcs égaux et inversement (**227**). Si l'on prend pour unité d'arc un arc ayant précisément comme angle au centre l'angle-unité, on voit que l'arc mesuré par $\frac{1}{10}$ correspond à l'angle mesuré par $\frac{1}{10}$, l'arc mesuré par $\frac{7}{100}$ à l'angle mesuré par $\frac{7}{100}$, etc... On en déduit que *le nombre qui exprime la mesure d'un angle au centre, ou, si l'on veut, le rapport de cet angle à l'angle-unité est égal au nombre qui exprime la mesure de l'arc intercepté par ses côtés sur la circonférence, ou encore au rapport de cet arc à l'arc-unité, pourvu toutefois que l'on ait grand soin de prendre comme unité d'arc l'arc correspondant à l'unité d'angle* (**37**). C'est ce que l'on traduit en pratique sous la forme suivante, incorrecte, mais commode : *l'angle au centre a même mesure que l'arc qu'interceptent ses côtés.*

Si, par exemple, on prend comme unité d'angle l'angle droit, la circonférence tout entière donne un arc égal à 4, la demi-circonférence un arc égal à 2. En grades la circonférence vaut 400^{γ}, et en degrés 360°. On emploie encore parfois une autre unité pour les arcs, et par suite pour les angles, le *radian* (**162**).

235. — On appelle *angle inscrit* dans une circonférence tout angle tel que AMB dont le sommet M est sur la circonférence (*fig.* 113). Ces angles ont une propriété extrêmement remarquable : *un angle inscrit* AMB *a même mesure que la moitié de l'arc* AB *qu'interceptent ses côtés sur la circonférence*, ou, de façon plus précise, l'angle AMB est égal à la moitié de l'angle AOB. On le démontre en menant le diamètre MOC. L'angle au centre AOC, extérieur au triangle isocèle AOM, est égal au double de l'un des angles à la base AMO (**219**). De même BOC est le double de BMO. Donc leur somme AOB est bien le double de l'angle AMB.

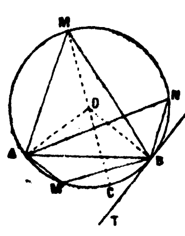


Fig. 113

On en déduit que, pour tout point N de la circonférence situé au-dessus de AB, l'angle ANB est égal à l'angle AMB. Quand N vient en B, la corde BN vient suivant la tangente BT (**229**) et l'on trouve que l'angle ABT est égal à AMB. Si l'on prend M′ au-dessous de AB, on verra aisément que l'angle AM′B est constamment supplémentaire de l'angle AMB. On peut déduire de ces propriétés un grand nombre de conséquences, dont voici les plus remarquables.

Si un angle AMB *de grandeur constante pivote autour de son sommet* M, *les arcs qu'il intercepte sur une circonférence passant par* M *sont tous égaux entre eux.*

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un quadrilatère AMBM′ *soit inscriptible dans une circonférence est que deux angles opposés quelconques soient supplémentaires* (**219**).

Le lieu des points d'où l'on voit un segment de droite AB *sous un angle* AMB *donné est formé de deux arcs de cercle, passant par* A *et* B, *symétriques par rapport à* AB. *Chacun de ces arcs est plus grand qu'une demi-circonférence si l'angle* AMB *est aigu ; chacun d'eux est plus petit qu'une demi-circonférence si l'angle* AMB *est obtus.* L'un quelconque de ces arcs s'appelle parfois le *segment capable de l'angle donné.*

Enfin signalons une dernière application très importante : *tout angle* AMB *inscrit dans une demi-circonférence est droit* (*fig.* 114).

Nous avons déjà démontré cette propriété (**221**) lorsque nous avons dit que dans un triangle rectangle AMB on a OA = OB = OM. On peut encore dire :

Tous les rectangles AMBM′ *sont des quadrilatères inscriptibles. — Le lieu des points d'où l'on voit un segment de droite* AB *sous un angle droit est la circonférence ayant ce segment pour diamètre.*

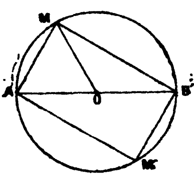


Fig. 114

236. Géométrie sphérique. — On appelle ainsi la partie de la géométrie qui s'occupe plus spécialement des figures tracées sur la surface de la sphère. Nous nous bornerons à quelques indications très sommaires sur l'étude des figures formées par des cercles ou des arcs de cercles tracés sur la sphère.

Le plus court chemin d'un point à un autre sur la surface de la sphère est donné par l'arc de grand cercle plus petit qu'une demi-circonférence qui joint ces deux points. Prenons deux points A et B sur la surface d'une sphère et supposons qu'ils ne soient pas diamétralement opposés (*fig.* 115). Par ces deux points, il ne passe qu'un seul plan contenant le centre de la sphère et par suite qu'un seul grand cercle Γ (**228**).

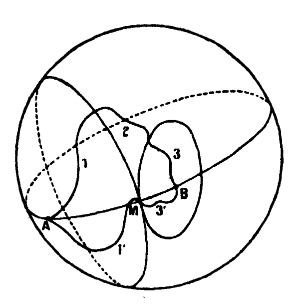


Fig. 115

Soit M un point quelconque du plus petit des deux arcs de Γ qui vont de A à B. Nous allons montrer que, si l'on se donne un chemin quelconque, on peut trouver un chemin plus court passant par M. Considérons en effet les deux cercles de pôles A et B passant par le point M. La perpendiculaire en M au plan des axes des deux cercles étant tangente à chacun d'eux (**229**) on en déduit qu'ils sont complètement extérieurs l'un à l'autre.

Décomposons maintenant le chemin arbitrairement choisi en trois portions numérotées 1, 2, 3, la première allant de A au cercle de pôle A et la dernière du cercle de pôle B à B. Sans

changer la longueur du chemin numéroté 1 [1], on peut, par une rotation convenable autour du diamètre du point A, amener ce chemin en 1′, son extrémité étant en M. On amènera de même le chemin 3 en 3′. On voit que le chemin 1′ — 3′ est certainement plus court que le chemin 1 — 2 — 3, la partie 2 ayant été supprimée. Le même raisonnement montre que le plus court chemin passe par tous les points de l'arc AB. C'est donc cet arc.

Cette proposition est fondamentale en géométrie sphérique; elle montre que les arcs de grand cercle équivalent sur la sphère à la droite en géométrie plane (**205**). Remarquons cependant que par deux points du plan il ne passe jamais qu'une seule ligne droite, tandis que par deux points d'une sphère il passe un nombre illimité d'arcs de grand cercle dans le cas tout particulier où les deux points sont diamétralement opposés.

237. — On définit un *polygone sphérique* de façon analogue à un polygone plan, les côtés étant ici des arcs de grands cercles moindres qu'une demi-circonférence. En chaque sommet, les angles d'un tel polygone sont, par définition, les angles des tangentes aux grands cercles qui s'y coupent.

Les propriétés des polygones sphériques, et plus particulièrement des *triangles sphériques*, ont déjà été étudiées. Prenons en effet un tel triangle ABC (*fig.* 116), et considérons le trièdre dont les arêtes sont OA, OB, OC. Les arcs de grands cercles AB, BC, CA mesurent les angles des faces du trièdre et les angles A, B, C du triangle sphérique sont les angles rectilignes des dièdres OA, OB, OC. Il résulte par suite des propriétés des trièdres (**201**) divers énoncés tels que les suivants.

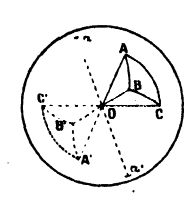


Fig. 116

Si, dans un triangle sphérique, deux côtés sont égaux, il en

---

[1] Pour être rigoureux, il faudrait définir exactement ce que l'on entend par longueur d'un arc de courbe (**261**), mais, malgré cela, la démonstration est facile à suivre.

est de même des angles opposés et inversement. En particulier, un trièdre trirectangle donne un triangle sphérique dont les trois angles sont droits et les trois côtés égaux.

Dans un triangle sphérique, un côté est plus petit que la somme des deux autres.

La somme des côtés d'un triangle sphérique est inférieure à une circonférence de grand cercle.

Les trièdres symétriques correspondent aux triangles sphériques symétriques. Ici, les deux grands cercles AB et AC se coupent à nouveau en A′ diamétralement opposé à A. Les points B′ et C′ étant définis de façon analogue, le triangle A′B′C′ est dit *symétrique* du triangle ABC. Ils sont d'ailleurs symétriques par rapport au point O (**319**). Deux tels triangles ne sont pas en général superposables.

On pourrait encore énoncer quatre cas d'égalité des triangles sphériques par analogie avec les cas d'égalité des trièdres (**203**).

La perpendiculaire en O au plan OBC perce la sphère en deux points α, α' qui sont pôles du grand cercle BC (**228**). Ce grand cercle BC partage la sphère en deux parties et, seul, le pôle α est dans le même hémisphère que A. Il est aisé de voir que le trièdre supplémentaire du trièdre OABC de sommet O découpe précisément sur la sphère un triangle sphérique $\alpha\beta\gamma$ dont les sommets sont pôles des côtés du triangle ABC. D'ailleurs, les sommets de ABC sont pôles des côtés de $\alpha\beta\gamma$. Ces deux triangles sont dits pour cette raison *polaires* ou *supplémentaires*. Les propriétés des triangles polaires se déduisent de celles des trièdres supplémentaires (**202**).

Fig. 117

238. Cônes et cylindres de révolution. — Lorsqu'un point A tourne autour d'un axe zz' (*fig.* 117), il décrit un cercle Γ d'axe zz' (**225**). Si l'on fait tourner de même une courbe G quelconque, plane ou gauche, appelée *génératrice*, la surface qu'elle engendre s'appelle une *surface de révolution* d'axe zz'. Les cercles Γ que décrivent les divers points A de G sont les

parallèles de cette surface. *Toute section d'une surface de révolution par un plan perpendiculaire à l'axe est formée d'un ou de plusieurs cercles de même axe.*

La section de cette surface par un plan quelconque passant par l'axe est une courbe C que l'on appelle *méridien*. Tous les méridiens étant superposables sont égaux et l'un quelconque d'entre eux peut être substitué à G pour engendrer la surface. Toute courbe tracée sur la surface peut d'ailleurs servir de courbe génératrice.

Une sphère est une surface de révolution autour d'un quelconque de ses diamètres ; les méridiens sont des grands cercles.

Si le méridien est une droite Δ coupant zz' en O (*fig.* 118), la surface de révolution est dite une *surface conique de révolution* de sommet O. Si Δ' est une parallèle à l'axe, on a (*fig.* 119) une *surface cylindrique de révolution*. Dans ce dernier cas, tous les parallèles sont égaux, ce qui montre que *le lieu géométrique des points de l'espace situés à une distance donnée d'une droite donnée est un cylindre de révolution ayant cette droite pour axe.* Un cylindre coïncide donc avec lui-même par une translation quelconque parallèle à l'axe (**213**).

Dans le cas d'un cône ou d'un cylindre, on réserve plus particulièrement le nom de *génératrices* aux droites telles que Δ.

On appelle parfois *cône droit à base circulaire* ou, en abrégé, lorsqu'aucune ambiguïté n'est à craindre : *cône*, le solide compris entre un parallèle Γ et la portion de surface conique qui s'étend de ce parallèle au sommet (**271**, **279**). Le cercle Γ est la *base* du cône. On appelle de même *cylindre droit à base circulaire* ou, en abrégé, *cylindre* le solide compris entre deux parallèles Γ et Γ' et la surface cylindrique qui va de l'un à l'autre (**273**, **279**). Les courbes Γ et Γ' sont les *bases* du cylindre.

239. — *Le plan tangent est le même en tous les points d'une génératrice d'un cône ou d'un cylindre.* Nous allons montrer à la

fois que ce plan tangent (230) existe en chaque point M d'un cône (autre que le sommet) ou d'un cylindre, et qu'il est le même tout le long de la génératrice Δ qui passe en ce point (*fig.* 118 ou 119). Soit A le point où Δ coupe un parallèle quelconque Γ. Prenons une courbe arbitraire passant par M et soit M′ un point voisin sur cette courbe. Par M′, passe une seconde génératrice Δ′ qui coupe en A′ le parallèle Γ. Le plan des deux droites Δ, Δ′ contient les cordes MM′ et AA′. A la limite, quand M′ tend vers M et par suite A′ vers A, ce plan, contenant la génératrice Δ la tangente A*t* en A au parallèle Γ et la tangente MT en M à la courbe considérée, est le plan tangent en M, ce qui justifie bien l'énoncé.

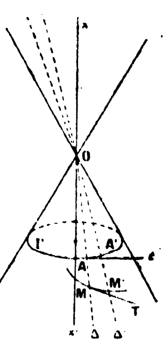


Fig. 118

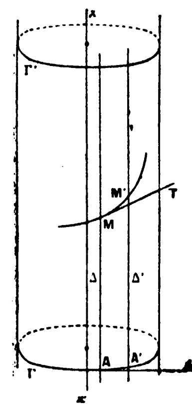


Fig. 119

On déduit aisément de ceci que *les normales au cône ou au cylindre en tous les points d'une même génératrice Δ sont parallèles et coupent l'axe.* Dans le cas du cylindre ces normales, qui sont perpendiculaires à l'axe, forment les *rayons* du cylindre.

Si l'on prend un cercle de centre O (*fig.* 120), une tangente quelconque AS à ce cercle et que l'on fasse tourner la figure autour d'un diamètre quelconque OS, le cercle engendre une sphère de centre O, la tangente AS un cône qui a en commun avec la sphère le parallèle que décrit le point A et ce parallèle seulement. On voit de plus qu'en tout point de ce parallèle le plan tangent est le même pour le cône et pour la sphère, la normale commune passant en O. On dit que *le cône est circonscrit à la sphère tout le long d'un parallèle*, ou encore que la sphère est *inscrite* dans le cône. Si l'on avait pris la tan-

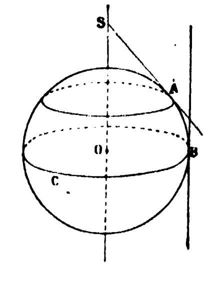


Fig. 120

gente en B, tangente qui est parallèle au diamètre OS, on aurait eu un *cylindre circonscrit à la sphère tout le long d'un parallèle*. La sphère est *inscrite* dans ce cylindre. Il est d'ailleurs évident que *toutes les sphères inscrites dans un cylindre ont même rayon que ce cylindre*.

Exercices. — N°s 321, 322, 323, 324, 325, 326, 327, 328, 329, 330, 331, 332, 333, 334, 335, 336, 337, 338, 339, 340, 341, 342, 343, 344, 354, 368, 407, 408, 435, 451, 470.

CHAPITRE IV

RELATIONS MÉTRIQUES

240. Segments. — Nous savons que l'on peut définir un point A sur une droite Ox (*fig.* 121) par son abscisse $\overline{OA}$ comptée à partir d'une origine fixe O, le sens positif sur l'axe étant fixé à l'avance (**66**). Il faut bien remarquer que $\overline{OA}$ désigne un nombre positif ou négatif, tandis que OA est un nombre toujours positif qui indique simplement la longueur du segment considéré, abstraction faite de son sens.

Fig. 121

Si l'on prend trois points quelconques A, B, C, il existe entre les segments $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ une relation très simple connue sous le nom de *relation de Chasles* :

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0$$

que l'on établit aisément en examinant les divers cas de figure. Ici, on remarque que cette relation peut s'écrire $\overline{AB} + \overline{CA} = -\overline{BC} = \overline{CB}$ et revient par suite à la relation arithmétique évidente $AB + CA = CB$.

La relation de Chasles permet en particulier d'exprimer la longueur d'un segment $\overline{AB}$ lorsqu'on connaît les abscisses $\overline{OA}$ et $\overline{OB}$ de ses extrémités : $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$.

Le lecteur établira sans peine que, si un point M est le milieu d'un segment $\overline{AB}$, son abscisse est la demi-somme des abscisses de A et B : $\overline{OM} = \dfrac{\overline{OA} + \overline{OB}}{2}$.

241. — Etant donnés un segment $\overline{AB}$ sur un axe et un point P quelconque (*fig.* 122), on dit que P divise $\overline{AB}$ dans le rapport $k = \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ (**37**, **74**). Ce rapport a, pour chaque position du point P, une valeur bien déterminée, d'ailleurs indépendante du choix de l'unité de longueur. Inversement, si l'on se donne un nombre k positif ou négatif, nous allons voir qu'il n'y a qu'un point P de la droite tel que $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = k$. Cherchons l'abscisse de ce point P, en supposant pour simplifier que l'origine des abscisses soit au point B. Posons $\overline{BA} = a$ et $\overline{BP} = x$, cette dernière abscisse étant inconnue. On a d'après la relation de Chasles : $\overline{PA} = \overline{PB} + \overline{BA} = -x + a$ et par suite : $k = \frac{-x+a}{-x} = \frac{x-a}{x}$.

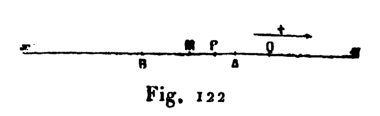


Fig. 122

Pourvu que x ne soit pas nul, c'est-à-dire que P ne soit pas en B, on peut écrire cette relation $kx = x - a$ et tirer x de cette équation du premier degré (**96**) :

$$x = \frac{a}{1-k}$$

ce qui donne pour x une valeur parfaitement déterminée et une seule, quel que soit k, sauf cependant pour $k = 1$, valeur dont nous reparlerons.

L'étude des variations de $k = \frac{x-a}{x}$, quand P décrit la droite, c'est-à-dire quand x varie, est facile (**156**), et le lecteur obtiendra sans peine les résultats qu'exprime le tableau suivant :

x	$-\infty$	croît	0		croît	a	croît	$+\infty$
k	1	croît	$+\infty$	$-\infty$	croît	0	croît	1

Il y a une discontinuité (**152**) pour $x = 0$; on peut tracer le graphique de ces variations (*fig.* 123) en portant en ordonnées en chaque point de la droite les valeurs de k. On reconnaîtra dans cette courbe une hyperbole équilatère (**147**), si l'on prend comme nouvelle origine des coordonnées le point O de Bk d'ordonnée $+1$.

On voit que k est négatif pour des points P compris entre A et B et positif pour toute autre position de P. Au milieu M de

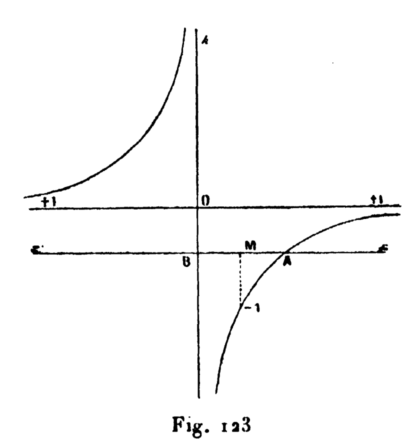


Fig. 123

AB on a $k = -1$. Enfin, si P s'éloigne indéfiniment sur la droite, k tend vers une valeur limite égale à 1.

242. — Si l'on se donne seulement la valeur absolue de k, c'est-à-dire si l'on se borne à considérer l'égalité $\frac{PA}{PB} = k$ comme une égalité arithmétique, on trouve deux points P et Q (*fig.* 122), qui correspondent aux deux relations algébriques : $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = k$; $\frac{\overline{QA}}{\overline{QB}} = -k$. On a donc :

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = -\frac{\overline{QA}}{\overline{QB}}.$$

Deux tels points P et Q sont dits *conjugués harmoniques* par rapport aux points A et B. Il résulte de l'étude des variations de k, que, des deux points P et Q, il y en a toujours un et un seul entre A et B, et aussi que les deux points sont d'un même côté du milieu M de AB.

Si l'on écrit l'égalité ci-dessus : $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = -\frac{\overline{QA}}{\overline{QB}}$ sous la forme $\frac{\overline{PA}}{\overline{QA}} = -\frac{\overline{PB}}{\overline{QB}}$ ou encore $\frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}} = -\frac{\overline{BP}}{\overline{BQ}}$, on voit que A et B sont

deux points C et C′ partagent les côtés AB et AB′ en segments proportionnels, CC′ est parallèle à la base BB′ du triangle.

Dans un triangle ABC, *la bissectrice intérieure* AD *et la bissectrice extérieure* AD′ *de l'angle* A *partagent le côté* BC *en*

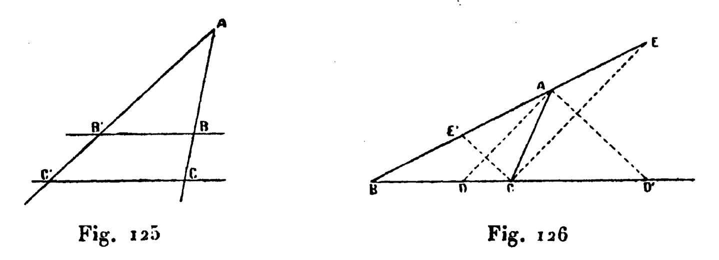


Fig. 125 Fig. 126

segments proportionnels aux deux autres côtés du triangle : $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{D'B}{D'C}$, les distances étant prises en valeur absolue (*fig.* 126). Démontrons par exemple la première proportion; menons la parallèle CE à AD, parallèle qui, comme AD, fait des angles égaux avec CA et BA (**214**). Le triangle ACE est par suite isocèle et l'on a AC = AE (**197**). D'autre part le théorème de Thalès donne ici : $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AE}$, ou, en remplaçant AE par AC : $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$. On fera une démonstration analogue pour AD′ en menant CE′ parallèle à AD′. Il résulte de plus de ceci que les quatre points B, C; D, D′ forment une division harmonique.

Donnons encore la propriété suivante : *le lieu géométrique des points* A *d'un plan, dont le rapport des distances à deux points fixes* B *et* C *de ce plan est égal à* k, *est une circonférence dont le centre est sur* BC. En effet, pour un tel point A on a $\frac{AB}{AC} = k$. Les bissectrices AD et AD′ de l'angle BAC coupent BC en deux points D et D′ qui partagent ce segment dans le rapport k et qui par suite sont fixes (**242**). Enfin, le point A étant tel que l'angle DAD′ soit droit est sur le cercle de diamètre DD′ (**235**).

Si l'on considère le lieu analogue pour les points de l'espace, on trouve une sphère de diamètre DD′.

245. Homothétie. — Considérons un point O fixe et un point A arbitraire de l'espace (*fig.* 127). Prenons sur la droite OA un point A′ tel que l'on ait $\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = k$, le nombre algébrique k ayant une valeur fixe. Le point A′ est dit *homothétique* du point A, le *centre d'homothétie* étant O et k le *rapport d'homothétie*.

Si A décrit une certaine courbe Γ, le lieu du point A′ est une autre courbe Γ′ homothétique de la première.

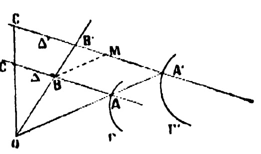


Fig 127

Si l'on prend un second point B et son homothétique B′, il résulte du théorème de Thalès que AB et A′B′ sont parallèles. On en déduit que l'homothétique C′ de tout point C de AB est sur A′B′, puisque A′B′ et A′C′ devant être parallèles sont confondues (**207**). *L'homothétique d'une droite Δ est une droite Δ′ parallèle à la première.* De même, on établira que *l'homothétique d'un plan est un plan parallèle au premier* (**211**).

On voit que deux angles homothétiques sont égaux, les côtés de ces angles étant respectivement parallèles (**214**); ceci est vrai qu'il s'agisse d'un angle plan, d'un angle dièdre ou d'un angle polyèdre. Les longueurs de deux segments homothétiques ne sont pas égales; nous allons montrer que pour deux tels segments $\overline{AB}$ et $\overline{A'B'}$ on a la relation $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = k$; menons en effet BM parallèle à OAA′. Dans le triangle A′OB′, le théorème de Thalès donne $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} = k$; mais $\overline{A'M}$ est précisément égal à $\overline{AB}$, ce qui établit l'énoncé. Nous avons gardé la notation algébrique, mais son emploi n'est justifié que si l'on suppose que le sens positif est le même sur les deux parallèles Δ et Δ′.

En résumé, *si l'on remplace une figure par son homothétique dans le rapport k, tous les angles sont conservés, mais toutes les distances sont multipliées par k.*

246. — Les applications de ces propriétés sont des plus nombreuses. Nous allons énumérer les principales.

La droite qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle est égale à la moitié du côté auquel elle est parallèle, puisqu'elle est homothétique de ce côté, dans le rapport $\frac{1}{2}$, par rapport au sommet correspondant. On étendra aisément cette propriété au trapèze : *la droite qui joint les milieux de deux côtés non parallèles d'un trapèze est égale à la demi-somme des deux côtés parallèles.*

La figure homothétique, dans le rapport k, d'une circonférence est une nouvelle circonférence située dans un plan parallèle au plan de la première et dont le rayon est égal au rayon de la première multiplié par k, puisque tous les points de la nouvelle figure sont encore à une distance constante du centre. Si le centre d'homothétie est dans le plan de la circonférence donnée, la circonférence homothétique est aussi dans ce plan. De même, *la figure homothétique, dans le rapport k, d'une sphère est une autre sphère dont le rayon est égal au rayon de la première multiplié par k.* La ligne des centres des deux sphères passe par le centre d'homothétie.

Nous laissons au lecteur le soin d'établir que deux cercles d'un même plan ou deux sphères peuvent toujours être considérés comme homothétiques. Deux points de la ligne des centres, d'ailleurs conjugués harmoniques par rapport à ces centres, peuvent servir de *centre d'homothétie* ou, comme l'on dit parfois, de *centre de similitude* pour les deux figures (**293**).

Enfin, signalons la propriété suivante facile à justifier : si deux cercles sont homothétiques par rapport à un point O, une tangente à l'un d'eux passant par O est aussi tangente à l'autre.

On prend parfois pour centre d'homothétie un point remarquable de la figure. C'est ainsi que la figure homothétique d'un cercle, ou d'une sphère, par rapport à son centre est un cercle, ou une sphère, concentrique. La figure homothétique d'un angle polyèdre par rapport à son sommet est cet angle polyèdre lui-même ; toute section plane donne par homothétie une nou-

velle section plane dans un plan parallèle. Inversement d'ailleurs, *deux polygones de section d'un angle polyèdre par des plans parallèles sont homothétiques par rapport au sommet de cet angle.* De façon analogue, tous les parallèles d'un cône (**238**) peuvent être considérés comme homothétiques par rapport à son sommet, l'homothétique de la surface conique étant cette surface elle-même.

247. — Nous allons appliquer ce qui précède à la notion importante de *faisceau harmonique.*

On dit que quatre droites concourantes $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$, $O\delta$ (*fig.* 128) forment un faisceau harmonique, ou encore que $O\alpha$ et $O\beta$ sont conjuguées harmoniques par rapport à $O\gamma$ et $O\delta$, si la section de ces quatre droites par une sécante quelconque donne quatre points A, B, C, D en division harmonique (**242**). Nous allons démontrer que, si ceci a lieu pour une certaine sécante, il en est de même pour toute autre sécante.

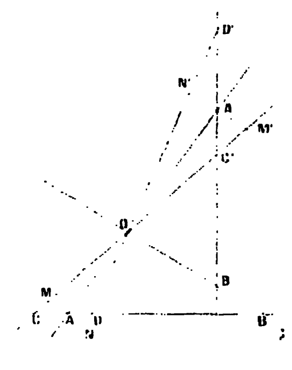


Fig. 128

Supposons que pour la sécante ABCD cette propriété ait lieu : menons par A une parallèle MAN à OB et montrons que A est le milieu de MN. Le segment $\overline{AM}$ est homothétique de $\overline{BO}$ par rapport à C dans le rapport $k = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$ ce que l'on peut écrire $\frac{\overline{AM}}{\overline{BO}} = k$. De même $\overline{AN}$ est homothétique de $\overline{BO}$ par rapport à C dans le rapport $k' = \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$ et par suite $\frac{\overline{AN}}{\overline{BO}} = k'$. On a d'ailleurs $k = -k'$, puisque, par hypothèse, A, B et C, D forment une division harmonique, donc $\frac{\overline{AM}}{\overline{BO}} = -\frac{\overline{AN}}{\overline{BO}}$, ou $\overline{AM} = -\overline{AN}$.

Pour prouver maintenant que toute autre sécante donne en A′, B′, C′, D′ une division harmonique, menons par A′ une

parallèle M'N' à OB'. Les points M', A', N' étant respectivement homothétiques de M, A, N par rapport au point O, le point A' est le milieu de M'N'. Il suffit pour achever la démonstration de refaire en sens inverse le raisonnement précédent : $\overline{A'M'}$ est homothétique de $\overline{B'O}$ dans le rapport $\frac{\overline{C'A'}}{\overline{C'B'}}$ et $\overline{A'N'}$ est homothétique de $\overline{B'O}$ dans le rapport $\frac{\overline{D'A'}}{\overline{D'B'}}$. Mais $\overline{A'M'} = -\overline{A'N'}$, donc ces deux rapports sont égaux et de sens contraire et par suite A', B', C', D' forment une division harmonique.

Le lecteur remarquera que, d'après la démonstration qui précède, *si quatre droites forment faisceau harmonique, en les coupant par une parallèle à l'une d'elles on obtient trois points dont l'un est le milieu du segment déterminé par les autres et réciproquement.*

Citons, parmi les applications les plus simples des faisceaux harmoniques, les propriétés suivantes qu'il serait facile de justifier.

Les diagonales d'un parallélogramme et les parallèles aux côtés menées par son centre forment un faisceau harmonique.

Deux côtés AB *et* AC *d'un triangle* ABC, *la médiane issue de* A *et la parallèle au côté* BC *menée par* A *forment un faisceau harmonique.*

Les deux côtés d'un angle et ses deux bissectrices forment un faisceau harmonique (**244**).

248. Similitude. — On dit que deux figures sont *semblables* lorsqu'elles peuvent être placées de façon à être homothétiques. On obtient donc toutes les figures semblables à une figure donnée en prenant toutes les figures égales à ses diverses homothétiques. C'est ainsi que deux cercles quelconques de l'espace ou deux sphères quelconques sont des figures semblables. Il en sera de même pour deux triangles équilatéraux, deux triangles rectangles isocèles, etc...

Nous nous bornerons à chercher ici à quelles conditions simples on peut reconnaître la similitude de deux triangles.

Rappelons que, d'après des propriétés déjà établies (**245**), si deux triangles ABC, A'B'C' (*fig.* 129) sont homothétiques ou simplement semblables, les angles correspondants sont égaux, et les côtés du second s'obtiennent en multipliant les côtés correspondants, ou, comme l'on dit, les côtés *homologues* du premier, par un même nombre k qui est le rapport d'homothétie :

$$A = A' \quad B = B' \quad C = C' \quad \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} = k$$

ce que l'on énonce : *deux triangles semblables ont les angles correspondants égaux et les côtés homologues proportionnels.*

Ces conditions sont au nombre de quatre seulement, car l'égalité des angles A et A', B et B' entraîne celle des angles C et C' (**218**). De plus, elles ne sont pas toutes indépendantes ; il suffit de s'en donner deux pour entraîner les deux autres. Nous allons démontrer en effet que : *deux triangles* ABC, A'B'C' *sont semblables* 1° *si deux angles de l'un sont égaux aux angles homologues de l'autre* : $A = A'$; $B = B'$; 2° *s'ils ont deux angles égaux* $A = A'$, *les côtés qui les comprennent étant proportionnels* : $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}$; 3° *si les côtés homologues sont proportionnels* : $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}$.

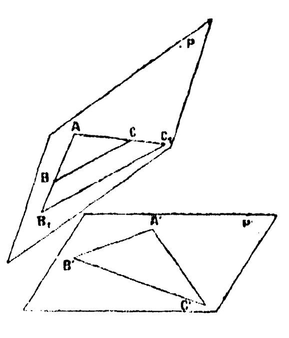


Fig. 129

Ces trois cas, qui s'appellent les *cas de similitude des triangles*, se ramènent immédiatement aux trois cas d'égalité (**198**). En effet, prenons un triangle AB_1C_1 déduit du triangle ABC par une homothétie de centre A et de rapport $k = \frac{A'B'}{AB}$ tel que AB_1 soit égal à A'B'. Nous allons montrer que le triangle AB_1C_1 qui est homothétique à ABC est égal au triangle A'B'C'. En se reportant aux trois énoncés ci-dessus on voit en effet que l'on a dans le premier cas : $AB_1 = A'B'$; $A = A'$; $B_1 = B'$; dans le deuxième cas : $AB_1 = A'B'$; $AC_1 = A'C'$; $A = A'$ et enfin dans le

troisième cas : $AB_1 = A'B'$; $AC_1 = A'C'$; $B_1C_1 = B'C'$. On reconnaît là les trois cas d'égalité des triangles.

Il résulte en particulier de ceci que, *si deux triangles ont les côtés correspondants parallèles, ils sont semblables*, les angles homologues étant égaux (**214**).

Si les deux triangles ABC, A'B'C' (*fig.* 129) sont rectangles en A et A', on établirait, par des raisonnements analogues à ceux qui précèdent (**200**), que *deux triangles rectangles* ABC, A'B'C' *sont semblables* 1° *s'ils ont deux angles aigus égaux* $B = B'$; 2° *si deux côtés de l'un sont proportionnels aux côtés homologues de l'autre :* $\frac{B'C'}{BC} = \frac{A'B'}{AB}$ *ou* $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}$.

249. Relations métriques. — On appelle plus particulièrement *relations métriques* en géométrie des relations algébriques dans lesquelles entrent certaines longueurs mesurées sur les figures que l'on considère. Pour abréger l'écriture, on désigne habituellement par des lettres les valeurs absolues des divers segments de ces figures.

Les premiers chapitres de géométrie ne contiennent que peu de relations métriques et celles qui s'y trouvent ne sont guère que des égalités ou des inégalités entre deux longueurs, c'est-à-dire des relations de la forme $a = a'$, ou $a > a'$.

Dès le début de ce chapitre, nous avons eu des relations faisant intervenir des rapports de longueurs ; c'est ainsi qu'en désignant les côtés homologues de deux triangles semblables par a, b, c ; a', b', c', on peut écrire : $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$. Les relations que nous allons étudier maintenant seront de formes encore plus complexes, telles que $a^2 = b^2 + c^2$, etc...

Toutes les relations entre des longueurs d'une même figure doivent être homogènes, c'est-à-dire que tous les termes doivent être de même degré, pourvu que, cependant, comme cela a toujours lieu en pratique, aucune des longueurs mesurées ne soit remplacée par sa valeur numérique. Nous admettrons cette propriété qui a une certaine importance pratique parce qu'elle permet d'éviter des erreurs de calcul.

250. — Prenons un triangle ABC, rectangle en A et menons la hauteur AH (*fig.* 130). Nous pouvons considérer trois triangles rectangles : ABC, ABH, AHC que pour la clarté du raisonnement nous avons représentés séparément. Ces trois triangles rectangles ont des angles aigus égaux : ABH = HAC, car ces deux angles ont le même complément ACB (**219**). Ils sont donc semblables et les côtés homologues, qui ont reçu sur la figure les mêmes numéros, sont proportionnels. On obtient ainsi en comparant successivement les triangles ABC et ABH ; ABC et ACH et enfin ABH et AHC

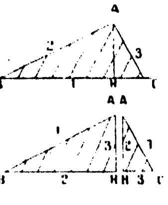


Fig. 130

$$\frac{BC}{AB}=\frac{BA}{BH}=\frac{AC}{AH} \qquad \frac{BC}{AC}=\frac{BA}{AH}=\frac{AC}{HC} \qquad \frac{AB}{AC}=\frac{BH}{AH}=\frac{AH}{HC}.$$

On déduit en particulier de ces diverses propriétés les égalités arithmétiques suivantes :

$$\overline{AB}^2 = BC.BH \quad \text{ou} \quad \overline{AC}^2 = CB.CH$$
$$BC.AH = AB.AC$$
$$\overline{AH}^2 = BH.HC.$$

Posons pour abréger : $BC = a$; $CA = b$; $BA = c$, puis $CH = b'$; $BH = c'$ et enfin $AH = h$, on a :

$$b^2 = ab' \qquad c^2 = ac'$$
$$bc = ah \qquad h^2 = b'c'$$

Si l'on se reporte à la définition de la moyenne géométrique de deux longueurs (**40, 242**), on voit que ces égalités peuvent s'énoncer :

Un côté de l'angle droit d'un triangle rectangle est moyenne géométrique entre l'hypoténuse entière et sa projection sur l'hypoténuse.

Le produit de deux côtés de l'angle droit est égal au produit de l'hypoténuse par la hauteur. Chacun de ces produits est égal comme nous le verrons au double de l'aire du triangle (**267**).

La hauteur d'un triangle rectangle est moyenne géométrique entre les deux segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse.

251. — On peut déduire de ces formules divers autres énoncés par des combinaisons purement algébriques. L'un des théorèmes auquel on est ainsi conduit, le *théorème de Pythagore*, est le plus important de tous ceux qui concernent les propriétés métriques des figures ; il sert en particulier de base à la trigonométrie (**165**) et à l'étude du cercle en géométrie analytique (**148**). C'est le suivant : *le carré de l'hypoténuse d'un triangle rectangle est égal à la somme des carrés des deux côtés de l'angle droit de ce triangle* (**275**). En effet les équations $b^2 = a \cdot b'$ et $c^2 = a \cdot c'$ donnent par addition $b^2 + c^2 = a(b' + c')$; mais $b' + c'$ est précisément égal à a. Donc :

$$b^2 + c^2 = a^2.$$

Nous aurons très fréquemment l'occasion d'appliquer ce théorème. Il peut s'énoncer sous une forme un peu différente.

Le carré de la diagonale OA *d'un rectangle est égal à la somme des carrés de deux côtés consécutifs* OB *et* OC (*fig.* 131) ; $\overline{OA}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2$, car les deux diagonales sont égales (**221**).

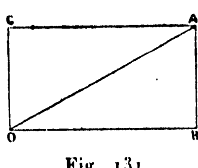


Fig. 131

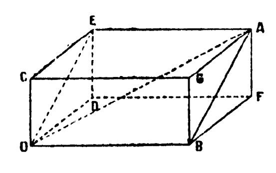


Fig. 132

Sous cette forme, le théorème peut être généralisé : *le carré de la diagonale* OA *d'un parallélépipède rectangle est égal à la somme des carrés de trois arêtes concourantes* OB, OC, OD (*fig.* 132), $\overline{OA}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 + \overline{OD}^2$. En effet : dans le rectangle OEAB, on a $\overline{OA}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{OE}^2$, mais, d'autre part, dans le rectangle OCED, on a $\overline{OE}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{OD}^2$ ce qui démontre l'énoncé.

Ce théorème de Pythagore permet de calculer un côté d'un triangle rectangle connaissant les deux autres. Si,

par exemple, deux côtés de l'angle droit sont respectivement $b = 4^m$ et $c = 3^m$, l'hypoténuse a pour longueur $a = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5^m$. Les formules déjà données permettent également de calculer b', c' et h ; ici $b' = \frac{b^2}{a} = \frac{16}{5} = 3^m,20$; $c' = \frac{c^2}{a} = 1^m,80$; $h = \frac{b \cdot c}{a} = \frac{4 \cdot 3}{5} = 2^m,40$.

Parmi les résultats simples que l'on peut obtenir ainsi, signalons simplement les deux suivants : *La diagonale d'un carré est égale au produit du côté par* $\sqrt{2}$. — *La diagonale d'un cube est égale au produit du côté par* $\sqrt{3}$.

252. — Nous donnerons encore deux autres applications du théorème de Pythagore en cherchant, à l'aide du calcul, les lieux géométriques des points M dont la somme ou la différence des carrés des distances à deux points fixes A, B est constante et égale au carré d'une longueur k (*fig.* 133).

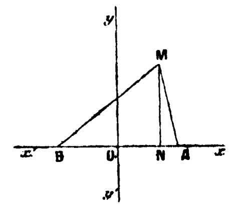


Fig. 133

Prenons pour origine le milieu O de AB, Ox étant dirigé suivant OA. Posons $\overline{OA} = -\overline{OB} = a$ et soient $\overline{ON} = x$, $\overline{NM} = y$ les coordonnées d'un point M du lieu. On a : $\overline{NA} = \overline{OA} - \overline{ON} = a - x$ et par suite $\overline{AM}^2 = \overline{NA}^2 + \overline{NM}^2 = (a - x)^2 + y^2$. On trouve de même $\overline{BM}^2 = (a + x)^2 + y^2$.

Pour le premier lieu, l'égalité $\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 = k^2$ s'écrit :

$$\left[(a - x)^2 + y^2\right] + \left[(a + x)^2 + y^2\right] = k^2$$

ou, en développant et simplifiant (**86**) :

$$2a^2 + 2x^2 + 2y^2 = k^2$$

que l'on peut écrire :

$$x^2 + y^2 = \frac{k^2 - 2a^2}{2}.$$

Mais $\overline{OM}^2 = x^2 + y^2$, donc le lieu de M est un cercle (**148**) de centre O et de rayon $\sqrt{\frac{k^2 - 2a^2}{2}}$. Ceci suppose, bien entendu,

que k^2 soit supérieur à $2a^2$, sans quoi le lieu n'existe pas. Inversement, il est facile de voir que, si un point M est sur ce cercle, on a bien $\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 = k^2$. Donc, *le lieu des points dont la somme des carrés des distances à deux points fixes est constant est un cercle ayant pour centre le milieu du segment qui joint les deux points.* En particulier si $\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 = \overline{AB}^2$, on verra que le lieu de M est précisément le cercle de diamètre AB, comme le théorème de Pythagore permet de le prévoir.

Pour le deuxième lieu, on a $\overline{BM}^2 - \overline{AM}^2 = k^2$ qui s'écrit :

$$\left[(a + x)^2 + y^2\right] - \left[(a - x)^2 + y^2\right] = k^2$$

ou, après simplification : $4ax = k$:

$$x = \frac{k^2}{4a}.$$

L'abscisse $x = \overline{ON}$ du point M est constante. Le lieu de M est une parallèle à Oy menée par N (**144**). Inversement, si M est un point de cette droite, on a $\overline{BM}^2 - \overline{AM}^2 = k^2$. *Le lieu des points dont la différence des carrés des distances à deux points fixes est constante est une perpendiculaire à la droite joignant ces points fixes.*

On pourrait présenter ces deux démonstrations sous une forme plus géométrique ; ce serait en particulier facile pour la dernière en remarquant que :

$$\overline{BM}^2 - \overline{AM}^2 = (\overline{BN}^2 + \overline{NM}^2) - (\overline{AN}^2 + \overline{NM}^2) = \overline{BN}^2 - \overline{AN}^2$$

253. Puissances. — Menons d'un point A diverses sécantes à un cercle telles que ABC, A'B'C'..... (*fig.* 134). Nous allons montrer que les produits tels que $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$ ou $\overline{AB'} \cdot \overline{AC'}$ sont indépendants de la sécante considérée.

Les deux triangles ABB', ACC', représentés à part dans le haut de la figure, sont semblables (**248**). L'angle en A est en effet commun à ces deux triangles et les angles ABB' et AC'C sont égaux puisqu'ils ont le même supplément B'BC, d'après une propriété connue du quadrilatère inscriptible (**235**). Donc,

les côtés homologues sont proportionnels, et l'on a en particulier : $\frac{AC}{AB'} = \frac{AC'}{AB}$ ce que l'on peut écrire : $\overline{AB}.\overline{AC} = \overline{AB'}.\overline{AC'}$.

Cette égalité, vraie en grandeur absolue, l'est encore en signe, et cela quel que soit le sens positif adopté sur chaque sécante, car les deux produits sont à la fois positifs ou négatifs. *Le produit des segments* $\overline{AB}, \overline{AC}$ *interceptés par un cercle sur une sécante quelconque* ABC *pivotant autour d'un point* A *donné est constant et s'appelle la puissance du point* A *par rapport à ce cercle.*

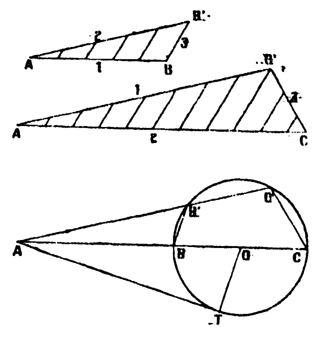


Fig. 134

Cette puissance est positive quand A est extérieur au cercle, négative s'il est intérieur et nulle s'il est sur le cercle.

Si l'on prend comme sécante le diamètre ABOC, on a $\overline{AB}.\overline{AC} = (\overline{AO} - \overline{OC})(\overline{AO} + \overline{OC}) = \overline{AO}^2 - \overline{OC}^2$. La puissance de A est donc égale au carré de la distance au centre diminuée du carré du rayon : $d^2 - R^2$. Si A est au centre du cercle, sa puissance est $- R^2$. Si A étant extérieur au cercle, AT est une tangente au cercle (**229**) la puissance est comme on le vérifie immédiatement $\overline{AT}^2$.

Il est d'ailleurs évident que tout ce qui précède s'étend immédiatement à la sphère. La puissance d'un point est encore égale à $d^2 - R^2$ et, si le point est extérieur, le carré de toute tangente issue de ce point à la sphère est égal à cette puissance.

254. — *Le lieu géométrique des points d'égale puissance par rapport à deux cercles d'un même plan est une perpendiculaire à la ligne des centres.* Soit M un point du lieu (*fig.* 135) ; désignons par d et d' ses distances OM, OM' aux centres des deux cercles de rayons R et R'. Par hypothèse, on a : $d^2 - R^2 = d'^2 - R'^2$, que l'on peut écrire $d^2 - d'^2 = R^2 - R'^2$; on voit que M est tel que la différence des carrés de ses distances à deux points fixes soit constante et égale à $R^2 - R'^2$. Son

lieu est donc une perpendiculaire sur OO′ (252). Cette droite s'appelle l'*axe radical* des deux cercles. Si les deux cercles se coupent, comme c'est ici le cas en A et B, ces deux points font partie du lieu qui contient la corde commune. Plus généralement, si un point de l'axe radical est intérieur à un cercle, il est intérieur à l'autre ; s'il est extérieur à l'un, il est extérieur à l'autre. Tous les cercles d'un faisceau (232) ont même axe radical deux à deux.

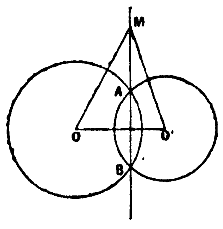


Fig. 135

Étant donnés trois cercles d'un même plan, les axes radicaux des ces cercles pris deux à deux se coupent en un même point appelé cercle radical des trois cercles. Soient O,O′, O″ les centres des trois cercles (*fig.* 136). Les axes radicaux Δ′ des cercles O et O″ et Δ″ des cercles O et O′ se coupent en un point C, à moins cependant que O, O′, O″ ne soient en ligne droite, cas que nous laisserons de côté. Ce point C ayant même puissance par rapport à O et O″ d'une part, O et O′ d'autre part, a même puissance par rapport à O et O′, donc est sur leur axe radical Δ. Ce centre radical C est d'ailleurs à la fois intérieur ou extérieur aux trois cercles.

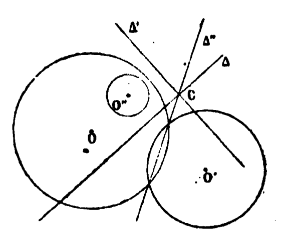


Fig. 136

On a des propriétés de tous points analogues dans le cas des sphères. Il suffira de les énoncer :

Le lieu géométrique des points d'égale puissance par rapport à deux sphères est un plan perpendiculaire à la ligne des centres. On l'appelle *plan radical* des deux sphères.

Le lieu géométrique des points d'égale puissance par rapport à trois sphères est une droite perpendiculaire au plan des centres. On l'appelle *axe radical* des trois sphères. Cette droite passe par le centre radical des trois grands cercles de section des sphères par le plan de leurs centres. Cet axe radical est dans chacun des plans radicaux des sphères prises deux à deux.

Étant données quatre sphères, il y a un point qui a la même

puissance par rapport aux quatre sphères. On l'appelle *centre radical* de ces sphères. Ce point est sur tous les plans ou axes radicaux des sphères prises deux à deux ou trois à trois.

255. Cercles orthogonaux. — On dit que *deux cercles sont orthogonaux lorsqu'ils se coupent à angle droit,* c'est-à-dire lorsque les tangentes en un de leurs points communs A (*fig.* 137) sont rectangulaires. Il en est par suite de même au second point A' de rencontre des deux cercles, la ligne des centres étant un axe de symétrie de la figure (**232**). Les rayons en un de ces points sont aussi rectangulaires (**229**), et le triangle rectangle qu'ils forment avec la ligne des centres donne la relation

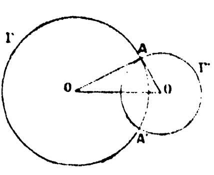


Fig. 137

$$d^2 = R^2 + R'^2$$

en désignant par d la distance des centres et par R et R' les rayons. Inversement, si l'on a une telle relation, les deux cercles sont orthogonaux.

Si deux des quantités d, R ou R' sont connues on détermine immédiatement la troisième. En particulier, il y a un cercle et un seul de centre donné, orthogonal à un autre cercle donné, pourvu que ce centre soit extérieur au cercle donné.

Si un cercle de rayon R est orthogonal à un cercle donné, la puissance de son centre par rapport à ce cercle donné est R^2, et réciproquement. On en déduit que *le lieu des centres des cercles* γ *orthogonaux à deux cercles fixes* Γ *et* Γ' *est l'axe radical de ces cercles.* Si, en effet, r est le rayon d'un tel cercle γ, la puissance de son centre est la même, et égale à r^2, par rapport aux deux cercles fixes Γ et Γ'.

De même, *il y a en général un cercle et un seul orthogonal à trois cercles donnés.* Il a pour centre le centre radical des trois cercles.

256. Pôles et polaires. — *Étant données deux droites* D, D' *concourantes en* S *et un point* A *de leur plan, le lieu du con-*

jugué harmonique de A *par rapport aux deux points de rencontre* B, B′ *des deux droites avec une sécante quelconque passant par* A *est une droite* Δ *passant par* S, *droite que l'on appelle la polaire du point* A *par rapport à* D *et* D′ (*fig.* 138).

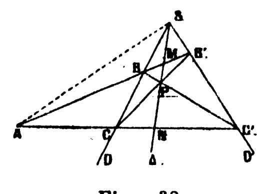


Fig. 138

Si M est le conjugué harmonique de A par rapport à BB′ (**242**), le faisceau des quatres droites SA, SM; SB, SB′ est un faisceau harmonique, ce qui détermine SM de façon unique. Ce théorème revient au fond à une propriété déjà démontrée (**247**).

Il est commode de construire la droite SM par le procédé très simple qui suit : menons deux sécantes ABB′ et ACC′; les deux droites BC′ et B′C se coupent en un point P de la polaire de A. En effet, le faisceau des quatre droites PA, PM; PB, PB′ qui est un faisceau harmonique coupé par la sécante ACC′ donne en N le conjugué harmonique de A par rapport à CC′; P étant sur la droite MN qui joint les conjugués de A par rapport à BB′ et CC′ est bien sur la polaire de A.

Etant donnés un cercle de centre O *et un point* A *de son plan, le lieu du conjugué harmonique de* A *par rapport aux deux points* B *et* B′ *de rencontre de ce cercle avec une sécante quelconque issue de* A *est une droite perpendiculaire à la droite* AO, *et que l'on appelle la polaire de* A *par rapport au cercle* (*fig.* 139). Prenons le diamètre ACC′ et une sécante quelconque ABB′. D'après ce qui précède, les conjugués harmoniques N et M de A par rapport aux points B, B′ et C, C′ sont sur la polaire de A par rapport aux deux droites SBC et SB′C′. Mais dans le triangle SCC′, on voit que CB′ et C′B sont deux hauteurs, les angles CB′C′ et C′BC étant droits (**235**), donc SMPN, polaire du point A par rapport à SBC et SB′C′, passant par P est la troisième hauteur (**224**) et par suite est perpendi-

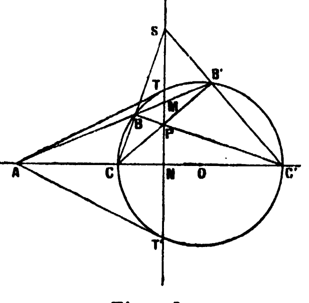


Fig. 139

culaire en N à CC'. Si l'on remarque enfin que N est un point fixe de CC', on voit que le point M reste constamment sur une droite fixe.

Réciproquement, si l'on prend un point M de cette droite, on verra qu'il convient au lieu, pourvu que AM coupe le cercle. Ceci a toujours lieu quand A est intérieur au cercle; quand A est extérieur, on peut remarquer que cette droite MN passe par les points de contact T et T' des deux tangentes issues de A (**287**). Le point M doit alors se trouver entre T et T'. C'est ce segment, appelé parfois *corde des contacts*, qui, à proprement parler, constitue le lieu. Cependant, par extension, on dit souvent que la polaire de A est la droite TT' supposée indéfiniment prolongée.

La démonstration qui précède montre comment l'on peut construire cette polaire en traçant deux sécantes ABB' et ACC', puis joignant, d'une part BC et B'C', d'autre part BC' et B'C. Il n'est pas d'ailleurs indispensable que l'une des sécantes soit un diamètre.

257. — Si l'on écrit la condition pour que A et N soient conjugués par rapport à C et C' sous la forme (**242**) : $\overline{OA} \cdot \overline{ON} = \overline{OC}^2 = R^2$, on voit que le produit $\overline{OA} \cdot \overline{ON}$ reste constant. Donc, plus A est loin du centre, plus la polaire en est voisine et inversement; lorsque A est en C, sa polaire est la tangente en C au cercle, mais les points de cette tangente ne répondent plus à la définition rigoureuse donnée plus haut.

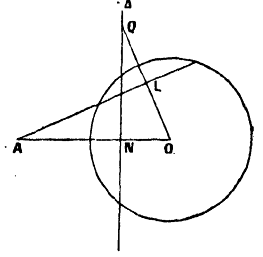


Fig. 140

Toute droite a, comme on le voit, un *pôle* A et un seul situé sur la perpendiculaire ON abaissée du centre sur cette droite et défini par : $\overline{ON} \cdot \overline{OA} = R^2$.

Etant donnés un point A *et sa polaire* Δ, *la polaire d'un point* Q *quelconque de* Δ *passe par* A *et, inversement, toute droite passant par* A *a son pôle* Q *sur* Δ (*fig.* 140). Les démonstrations de ces deux propositions étant à peu près identiques, nous nous

bornerons à la première. Prenons un point quelconque Q de Δ et menons par A la perpendiculaire AL sur OQ. Pour prouver que AL est la polaire de Q, il suffit d'établir que l'on a : $\overline{OL} \cdot \overline{OQ} = R^2$. Mais les triangles rectangles AOL et QON sont semblables (248) et donnent immédiatement : $\frac{\overline{OA}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{OL}}{\overline{ON}}$ ou $\overline{OL} \cdot \overline{OQ} = \overline{OA} \cdot \overline{ON} = R^2$.

Nous laissons au lecteur le soin d'en déduire que le cercle ayant comme diamètre AQ est orthogonal au cercle donné.

258. Polygones réguliers. — On appelle *ligne brisée régulière* une ligne telle que ABCDEF (*fig.* 141), dont les *côtés* consécutifs AB, BC, CD, ... sont égaux ainsi que les angles consécutifs, ABC, BCD, ..., ceux-ci étant disposés dans le même sens, comme le montre la figure. Pour justifier l'existence de telles lignes, prenons un cercle quelconque Γ et divisons un arc AF de ce cercle en un nombre quelconque de parties égales, 5 par exemple (290). Joignons deux à deux les points de division; on a une ligne brisée régulière, puisqu'une rotation de la figure d'un angle AOB (196) amène A en B, B en C, C en D, etc...; les côtés consécutifs sont égaux ainsi que les angles consécutifs. On voit en plus que l'on peut prolonger la ligne brisée au delà de F en prenant sur le même cercle des arcs FG, GH, ... égaux à AB. Il résulte en outre de ceci que tous les côtés de cette ligne brisée sont tangents à un cercle γ de centre O (229). Le rayon OP de ce cercle s'appelle l'*apothème*. La ligne brisée est dite *inscrite* dans le cercle Γ et *circonscrite* au cercle γ.

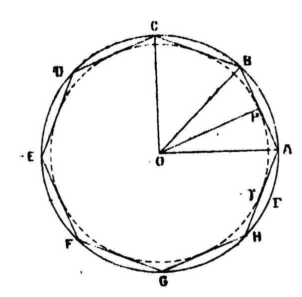


Fig. 141

Inversement, toute ligne brisée régulière ABC ... est inscriptible dans le cercle Γ passant par trois sommets consécutifs A, B, C, comme on le voit en faisant tourner la ligne brisée d'un angle AOB autour du centre O de ce cercle. Cette même ligne est circonscriptible à un cercle γ.

On considère le plus souvent des *polygones réguliers* qui sont des lignes brisées fermées. En divisant la circonférence en n parties égales (**290**) et joignant les points de division consécutifs, on forme un polygone régulier de n côtés. Un tel polygone est, d'après ce qui précède, inscriptible et circonscriptible.

259. — Etudions les polygones réguliers dont le nombre n de côtés a une des valeurs simples 3, 4 ou 6. Nous désignerons par R le rayon du cercle circonscrit et nous calculerons pour chaque polygone le côté c et l'apothème a en fonction de R.

Si $n = 4$, le polygone ABCD est un *carré* (**221**) (*fig.* 142); AC et BD sont les diagonales. Les 4 angles AOB, BOC, COD, DOA sont droits.

Le théorème de Pythagore appliqué au triangle AOB donne

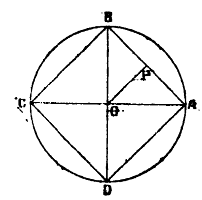


Fig. 142

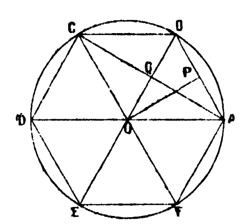


Fig. 143

$c^2 = R^2 + R^2$, ou $c = R\sqrt{2}$. Quant à l'apothème OP, elle est la moitié du côté : $a = \frac{c}{2} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$.

Les cas où $n = 3$ ou 6 se traitent simultanément. Divisons la circonférence en 6 parties égales (**290**) ce qui donne un *hexagone régulier* ABCDEF (*fig.* 143). Les points A et D, B et E, C et F sont deux à deux diamétralement opposés. En joignant les sommets de deux en deux, on a un *triangle équilatéral* ACE ou polygone régulier de trois côtés. L'angle au centre de l'hexagone régulier vaut $\frac{2}{3}$ d'angle droit (**234**), ou $66^{\gamma}\frac{2}{3}$ ou 60°. Celui du triangle équilatéral est le double : $\frac{4}{3}$ d'angle droit, ou $133^{\gamma}\frac{1}{3}$ ou 120°.

On a, pour le côté de l'hexagone, $c = R$, car le triangle OAB est équilatéral : en effet l'angle inscrit ABE, comme l'angle inscrit BAD, est égal à la moitié de l'angle au centre AOE (**235**), c'est-à-dire à l'angle AOF = AOB. Quant à l'apothème OP, elle est donnée par le théorème de Pythagore appliqué au triangle AOP : $a^2 = R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{3R^2}{4}$, où $a = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

Pour le triangle équilatéral, le côté $c' = AC$ est le double de l'apothème AQ = OP de l'hexagone (**226**) : $c' = R\sqrt{3}$. Quant à l'apothème OQ, c'est la moitié de OB, la hauteur AQ du triangle OAB étant aussi médiane (**197**) : $a' = \frac{R}{2}$.

Ceux de ces résultats qu'il importe le plus de retenir sont les suivants : *le côté du carré inscrit dans un cercle de rayon* R *est* $R\sqrt{2}$ *; celui du triangle équilatéral est* $R\sqrt{3}$, *celui de l'hexagone régulier est* R. Ce dernier résultat remarquable par sa simplicité est d'une application fréquente en pratique. C'est ainsi que, dans un écrou hexagonal, la largeur d'une face est égale au rayon.

260. — Le calcul du côté et de l'apothème d'un polygone régulier de n côtés peut se faire à l'aide des tables trigonométriques. Si AB est le côté d'un tel polygone (*fig.* 144), l'angle au centre AOB vaut en radians (**162**) $\frac{2\pi}{n}$, et dans le triangle rectangle OPA de côtés $OA = R$; $OP = a$; $AP = \frac{AB}{2} = \frac{c}{2}$ et d'angle $AOP = \frac{\pi}{n}$ on a (**179**) :

$$a = R \cos \frac{\pi}{n}$$

$$c = 2R \sin \frac{\pi}{n}.$$

C'est ainsi que le côté de l'heptagone régulier inscrit dans un cercle de rayon 1 est donné par $c = 2 \sin \frac{\pi}{7}$. L'angle de $\frac{\pi}{7}$ radians ou $\frac{200}{7} = 28^{\gamma},57$ donne comme sinus, en contemplant les tables de la fin du volume : 0,434. Donc le côté est 0,868 ; il est

sensiblement égal au demi-côté du triangle équilatéral inscrit dans le même cercle $\frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866$.

Ces calculs ne sont possibles sans le secours des tables trigonométriques que pour certains polygones particnliers ; mais il est bon de remarquer qu'on peut le faire pour des polygones dont le nombre de côtés est aussi grand qu'on le veut.

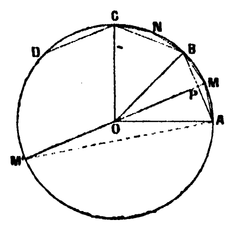


Fig. 144

Il suffit, pour le prouver, de montrer qu'étant donné le côté $AB = c$ d'un polygone régulier ABC ... (*fig.* 144),on peut en déduire, non seulement l'apothème a de ce polygone, mais encore le côté c' et l'apothème a' d'un polygone AMBNC ... ayant deux fois plus de côtés.

Le théorème de Pythagore appliqué au triangle AOP donne

$$a^2 = R^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2 = R^2 - \frac{c^2}{4} \quad \text{ou} \quad a = \sqrt{R^2 - \frac{c^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - c^2}.$$

Pour calculer $c' = AM$,remarquons que le triangle AMM', dont un côté est le diamètre MM', est rectangle en A (**235**), ce qui donne $\overline{AM}^2 = MM' \cdot MP$ (**250**), d'où : $c'^2 = 2R \cdot (R - a)$ ou encore $c' = \sqrt{2R(R - a)}$.

La valeur de a étant connue, on calcule c' et par suite a'. On procède de façon analogue pour le polygone ayant deux fois plus de côtés que AMBNC ... et ainsi de suite. Si, par exemple, le polygone primitif est un hexagone régulier, on pourra calculer les côtés et les apothèmes des polygones réguliers ayant successivement 12, 24, 48, 96, 192 ... côtés.

Exercices. — Nos 96, 119, 164, 166, 170, 210, 267, 345, 346, 347, 348, 349, 350, 351, 352, 353, 354, 355, 356, 357, 358, 359, 360, 361, 362, 363, 364, 365, 366, 367, 368, 369, 370, 371, 372, 373, 409, 411, 412, 413, 419, 420, 446, 447, 453, 460, 461.

CHAPITRE V

LONGUEURS, AIRES ET VOLUMES

261. Longueurs. — Il est assez délicat de définir de façon rigoureuse la longueur d'un arc d'une courbe plane ou gauche, bien qu'il s'agisse là d'une notion intuitive : on imagine aisément que, si une courbe est formée d'un fil enroulé, il suffise de tendre ce fil et d'en mesurer la longueur. Ceci revient au fond à considérer la courbe comme formée d'un très grand nombre de segments rectilignes qu'il suffit d'aligner bout à bout pour avoir la longueur totale. C'est ce qui a conduit à la définition suivante de la longueur d'un arc AB : considérons une ligne polygonale brisée dont les sommets soient sur l'arc considéré AMN ..... B (*fig.* 145) et faisons croître indéfiniment le nombre des côtés de cette ligne, en même temps que chacun d'eux tend vers zéro ; la limite du périmètre de la ligne brisée s'appelle la *longueur de l'arc de courbe*. Cette définition suppose, comme on le voit, que la limite existe et que, de plus, elle est indépendante de la ligne brisée considérée et de la façon dont on augmente le nombre de ses côtés.

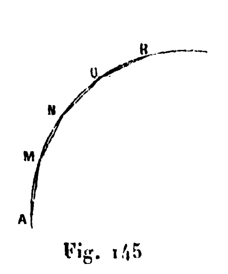


Fig. 145

Nous admettrons que ceci a lieu pour toutes les courbes que nous aurons à considérer.

262. — *Le rapport de la longueur d'une circonférence à son diamètre est un nombre constant.* Prenons deux circonférences quelconques C et C′ et amenons-les à être concentriques (*fig.* 146). C′ est alors homothétique de C (**246**), par rapport à son centre O, dans le rapport $\frac{OA'}{OA} = \frac{R'}{R} = k$. Prenons un polygone quelconque Γ inscrit dans C : ABC .. QA et le polygone homothétique Γ′ inscrit dans C′ : A′B′C′ .. Q′A′. Les côtés de Γ′ s'obtiennent en multipliant ceux de Γ par k. Son périmètre s'obtient aussi en multipliant celui de Γ par k. Quand le nombre des côtés augmente indéfiniment pour le polygone Γ, chaque côté tendant vers zéro, il en est de même pour le polygone homothétique Γ′. La limite de chaque périmètre est, d'après la définition ci-dessus, la longueur de la circonférence correspondante, et l'on voit que le rapport de ces longueurs est égal au rapport d'homothétie : $\frac{C'}{C} = k = \frac{R'}{R}$, ce que l'on peut écrire : $\frac{C}{R} = \frac{C'}{R'}$, ou encore, en introduisant les diamètres :

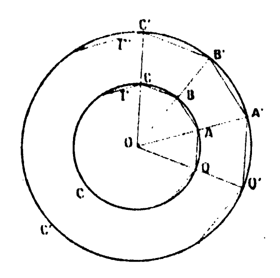


Fig. 146

$$\frac{C}{2R} = \frac{C'}{2R'}.$$

Ce rapport, qui a la même valeur pour toutes les circonférences, est désigné par la lettre grecque π et l'on a par suite : $\frac{C}{2R} = \pi$, ou :

$$C = 2\pi R$$

formule bien connue du lecteur.

Si l'on voulait calculer effectivement la valeur numérique de π par la méthode qui précède, on calculerait des périmètres successifs de polygones inscrits Γ, en prenant des polygones réguliers, dont on double ensuite le nombre des côtés. Par exemple pour un cercle de diamètre 1, on trouve comme périmètre de l'hexagone régulier inscrit 3, ce qui donne une première valeur approchée de π ; on en déduit (**260**) le périmètre

du dodécagone régulier inscrit $6\sqrt{2-\sqrt{3}} = 3,12$, puis successivement des polygones de 24, 48, 96, .. côtés. Mais, malgré les simplifications que l'on peut apporter à cette méthode, elle est extrêmement pénible, si l'on veut une certaine approximation pour la valeur de π. Comme, d'autre part, c'est par des procédés différents tirés de l'analyse, que l'on a calculé effectivement cette valeur, nous nous bornerons à la donner avec ses premières décimales :

$$\pi = 3,1415926\,\ldots\ldots$$

En pratique, on prend 3,1416 ou même 3,14 suivant les cas. Il est bon également de savoir par cœur la valeur de $\frac{1}{\pi}$:

$$\frac{1}{\pi} = 0,3183098\,\ldots\ldots$$

en pratique 0,3183, ce que l'on retient parfois à l'aide de la phrase « les 3 journées de 1830 ».

On a démontré qu'il était impossible de construire à la règle et au compas une longueur égale à π (**290**).

Cherchons, comme application, quel est l'arc de circonférence ou *radian* dont la longueur est égale au rayon (**162**). Deux arcs égaux ayant la même longueur, il y a proportionnalité entre la longueur d'un arc et l'angle au centre qui lui correspond (**234**). Pour un cercle de rayon 1, la longueur 2π de la circonférence correspond à un angle au centre de 400^{γ} et par suite un arc de longueur 1 correspond à un angle de $\frac{400}{2\pi} = 200 \,.\, 0,3183\,.. =$ $63^{\gamma},66$ .. soit environ $63^{\gamma}\,\frac{2}{3}$. En degrés, on trouve pour le radian : $57^{\circ}\,\frac{1}{3}$ environ.

Il résulte de la définition même du radian que, si un arc α est mesuré en radians, sa longueur est $l = R\alpha$ si le rayon du cercle est R.

263. Aires. — Les notions fondamentales d'*aires* et d'*aires équivalentes*, comme celles de *volumes* et de *volumes équivalents*,

sont familières au lecteur. Cette notion d'équivalence correspondra pour nous, aussi bien dans le cas des aires que dans celui des volumes, à une simple égalité numérique des nombres de mesure, mais pas forcément à une superposition possible de morceaux empruntés aux deux aires ou volumes.

On évalue une aire par comparaison avec une aire-unité. Toutes les aires que nous aurons à mesurer se calculent, comme nous le verrons, à l'aide de formules dans lesquelles les lettres représentent certaines dimensions de la figure supposées connues.

L'unité d'aire, étant en général l'aire du carré construit sur l'unité de longueur, est dans le système CGS (**51**) le centimètre carré, et dans le système métrique (**48**) le mètre carré, le décimètre carré ou le centimètre carré, ... suivant les cas.

Pour évaluer l'aire d'un rectangle ABCD (*fig.* 147), supposons d'abord que les longueurs de ses côtés, mesurés avec la même unité de longueur : LM = 1^{cm}, soient des nombres entiers : AB = DC = 5^{cm} ; AD = BC = 3^{cm}. Les propriétés élémentaires des réseaux de parallèles équidistantes (**208**) montrent que l'on peut diviser le rectangle en 3×5 carrés identiques au carré-unité LMNP. L'aire de ce rectangle est donc 15^{cm^2}. Le même raisonnement montre que le décimètre carré vaut 10.10 ou 100 centimètres carrés, le mètre carré 100.100 ou 10000 centimètres carrés, etc.



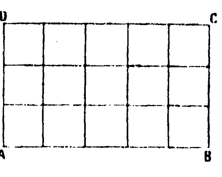


Fig. 147

Si les côtés AB et CD ne sont pas exprimés par des nombres entiers, supposons que l'on trouve une commune mesure entre AB et LM d'une part, AD et LM d'autre part (**36**). Nous n'examinerons pas le cas où ceci n'aurait pas lieu, cas sans importance au point de vue pratique. Supposons que, par exemple, le 9ème de LM soit contenu 47 fois dans AB et que le 7ème de LM soit contenu 20 fois dans AD. Les côtés AB et AD ont pour mesures $\frac{47}{9}$ et $\frac{20}{7}$, ou si l'on veut (**23**) : $\frac{47 \cdot 7}{9 \cdot 7} = \frac{329}{63}$ et $\frac{20 \cdot 9}{9 \cdot 7} = \frac{180}{63}$. Si l'on

considère maintenant un carré dont le côté soit le 63ème de LM, on voit qu'il est contenu 63 . 63 fois dans LMNP et 329 . 180 fois dans le rectangle qui a par suite comme aire $\frac{329 . 180}{63 . 63} = \frac{47 . 7 . 20 . 9}{63 . 63} = \frac{47}{9} . \frac{20}{7}$. Donc, dans tous les cas, *l'aire d'un rectangle est exprimée par le produit des nombres qui mesurent sa base et sa hauteur, pourvu que l'unité d'aire soit l'aire du carré construit sur l'unité de longueur*, ou encore, sous la forme incorrecte, mais abrégée, que nous emploierons désormais pour les énoncés analogues : *l'aire d'un rectangle est le produit de sa base par sa hauteur*, ce que l'on peut écrire :

$$S = a . h$$

en posant

$$AB = a, \ AD = h.$$

De même, *l'aire d'un carré est le carré de son côté.*

264. — L'évaluation de l'aire d'un rectangle se fait comme on le voit par comparaison directe avec l'aire-unité ou avec une de ses subdivisions. La même méthode ne peut s'appliquer à une aire plane quelconque que de la façon indirecte qui suit.

Considérons une aire S limitée par une courbe Γ et traçons dans le plan de cette aire deux réseaux de parallèles (*fig.* 148), de façon à découper le plan de cette courbe en un grand nombre de petits carrés de côté a. Considérons le polygone P formé par la juxtaposition de tous les carrés intérieurs à Γ. Si leur nombre est n, l'aire de P est : $A = n . a^2$. Si maintenant, nous diminuons de moitié l'écartement a des parallèles, ce qui donne des carrés 4 fois plus petits, nous définirons de même un nouveau polygone P', non représenté sur la figure, polygone qui contient P à son intérieur. En continuant ainsi de suite indéfiniment, on a des polygones dont les aires successives A, A', A''... vont en croissant, au moins

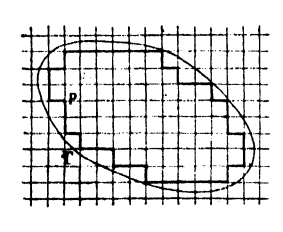


Fig. 148

en général, et sont toutes inférieures à l'aire S limitée par le contour Γ. Nous admettrons que ces aires ont une limite égale à S.

On aurait pu définir de façon analogue l'aire S en prenant des réseaux de parallèles découpant le plan S non plus en petits carrés, mais en petits rectangles.

Nous allons donner deux applications importantes de ces diverses considérations :

265. — *Si l'on projette suivant une aire s sur un plan p, une aire S prise dans un plan P, le rapport* $\frac{S}{s}$ *des deux aires est constant et égal au cosinus de l'angle aigu* α *des deux plans P et p* (*fig.* 149). Découpons le plan P en petits carrés, tels que ABCD, de côté a, par des parallèles à l'intersection des deux plans P et p, et des perpendiculaires à cette intersection. Si par exemple le plan p est supposé horizontal, dans le plan P les côtés de ce quadrillage seront des horizontales et des lignes de plus grande pente (**217**). La projection de ce quadrillage sur le plan p le découpe en petits rectangles tels que $abcd$. Le lecteur établira facilement que les côtés tels que ab sont parallèles aux côtés tels que AB des carrés du plan P et ont comme longueur a, tandis que les côtés tels que BC faisant l'angle α avec leur projection (**217**) sont réduits dans le rapport cos α (**179**); bc est donc égal à a cos α, et l'on a :

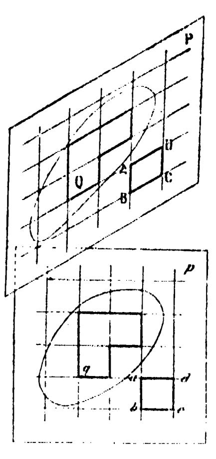


Fig. 149

$$\text{aire } abcd = a \,.\, a \cos \alpha = \text{aire ABCD} \,.\, \cos \alpha.$$

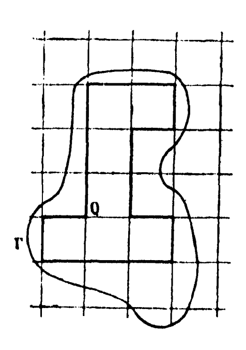
Si nous considérons maintenant le polygone Q formé des carrés intérieurs à l'aire S, et sa projection q formée par suite des rectangles intérieurs à l'aire s, on a entre leurs aires la même relation :

$$\text{aire } q = \text{aire Q} \,.\, \cos \alpha.$$

Si l'on diminue de plus en plus, comme nous l'avons dit, l'écartement a des parallèles du plan P, on obtient une suite de polygones d'aires Q, Q', Q'',... projetés suivant des polygones dont les aires q, q', q'',... sont respectivement les produits par $\cos\alpha$ de Q, Q', Q'',... Cette relation a encore lieu à la limite, ce qui démontre la propriété :

$$s = S \cos \alpha.$$

266. — *Si deux aires planes s et S sont limitées par des contours γ et Γ homothétiques dans le rapport k, le rapport $\frac{S}{s}$ de ces aires est égal à k^2, carré du rapport d'homothétie* (*fig.* 150). Traçons dans les plans de ces deux aires des quadrillages homothétiques (**245**) ; si a est le côté des carrés du plan de γ, ka est celui des carrés du plan de Γ. Si un carré de côté a est intérieur ou extérieur à γ, le carré homothétique de côté ka est aussi intérieur ou extérieur à Γ, et par suite les deux polygones q et Q, définis comme formés par la juxtaposition des carrés intérieurs à γ ou à Γ, contiennent le même nombre de carrés. Les aires de ces carrés étant a^2 et k^2a^2, on voit que l'on a entre les aires q et Q de ces polygones la relation $Q = q \cdot k^2$.



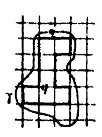


Fig. 150

Si maintenant on diminue l'écartement a des parallèles du plan de s et par suite aussi l'écartement ka des parallèles du plan de S, on définira de même des polygones d'aires q, q', q'',... et des polygones homothétiques dont les aires Q, Q', Q'',... seront toujours k^2 fois plus grandes. On a donc encore à la limite : $S = s \cdot k^2$.

Il est facile de voir que cette propriété équivaut à la suivante qui est presque intuitive : *si deux aires s et s_1 sont équivalentes, il en est de même de deux aires S et S_1 respectivement homothétiques de s et s_1 dans le même rapport k*, car il suffit de supposer

que l'aire s_1 est un carré de côté l qui, après homothétie, devient un carré de côté kl et par suite d'aire k^2 fois plus grande.

Nous reviendrons plus loin sur cet important résultat (**276**).

267. Aires des polygones. — L'évaluation des aires polygonales se fait habituellement par des méthodes complètement différentes de celles que l'on emploie pour des aires quelconques, mais, en dernière analyse, ces méthodes se ramènent toujours à la comparaison de l'aire du polygone avec celle d'un rectangle. Examinons quelques cas simples.

Si l'on divise un rectangle en deux parties égales, et par suite équivalentes, à l'aide d'une diagonale, on voit que *l'aire d'un triangle rectangle est égale au demi-produit des deux côtés de l'angle droit.* Plus généralement, pour un triangle quelconque ABC de hauteur AH (*fig.* 151), les aires des triangles rectangles AHB et AHC étant les moitiés de celles des rectangles AHBM et AHCN, l'aire du triangle ABC est la moitié de l'aire du rectangle MBCN de base BC et de hauteur MB = AH.

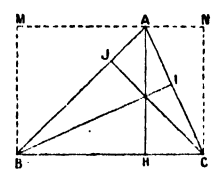


Fig. 151

Donc, *l'aire d'un triangle est égale au demi-produit de sa base par sa hauteur*, ce qu'exprime la formule : $S = \frac{a \cdot h}{2}$, avec BC $= a$ et AH $= h$. On déduit de ceci qu'*on peut, sans changer l'aire d'un triangle, déplacer son sommet* A *sur une parallèle à la base correspondante* BC.

Il y a, dans un triangle ABC, trois hauteurs AH, BI, CJ. Il résulte, de ce qui précède, la relation métrique suivante entre ces hauteurs et les bases correspondantes : AH . BC = BI . AC = CJ . AB.

Si ABC est un triangle équilatéral (**197**), H est le milieu de BC, et l'on a $\overline{AH}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{HC}^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4}$, d'où $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, et par suite, pour l'aire : $S = a.\frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

On a parfois besoin de connaître l'aire d'un triangle dont les trois côtés ont des longueurs connues a, b, c. Elle est donnée

par la formule suivante que nous avons établie en trigonométrie (**182**) :

$$S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

dans laquelle on désigne par p le demi-périmètre $\frac{a + b + c}{2}$ d'où l'on déduit : $p - a = \frac{b + c - a}{2}$, etc... Signalons enfin la formule : $S = \frac{1}{2}$ AB . AC . sin BAC $= \frac{1}{2} bc \sin A$, déjà démontrée (**182**).

268. — On ramène l'aire d'un parallélogramme ABCD (*fig.* 152) à des aires de triangles, en le découpant en deux triangles égaux par la diagonale BD. L'aire de chacun d'eux étant $\frac{AB \cdot DH}{2} = \frac{a \cdot h}{2}$, on voit que *l'aire d'un parallélogramme est égale au produit de sa base par sa hauteur* : $S = ah$. On peut d'ailleurs remplacer un parallélogramme par un rectangle équi-

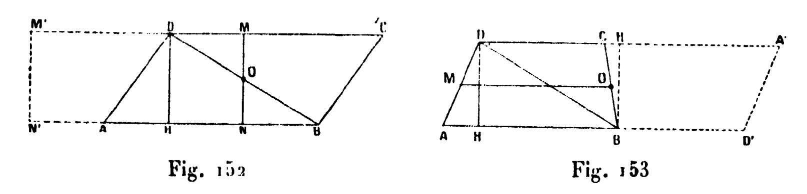


Fig. 152 Fig. 153

valent en le découpant en deux parties égales par la perpendiculaire MON à la base menée par le centre O, puis faisant subir au trapèze MNBC une translation (**213**) qui l'amène en M'N'AD.

On évalue l'aire d'un trapèze ABCD (**219**) (*fig.* 153) en le découpant en deux triangles ADB et DBC d'aires respectives $\frac{AB \cdot DH}{2} = \frac{a \cdot h}{2}$ et $\frac{DC \cdot BH'}{2} = \frac{DC \cdot DH}{2} = \frac{b \cdot h}{2}$. On en déduit que l'aire du trapèze est $S = \frac{(a + b)h}{2}$. *L'aire d'un trapèze est égale au demi-produit de la somme des bases par la hauteur.* On sait d'ailleurs (**246**) que la droite OM, qui joint les milieux de BC et AD, est égale à la demi-somme des bases. Remar-

quons enfin que l'on forme un parallélogramme d'aire deux fois plus grande que le trapèze ABCD en lui ajoutant le trapèze A'CBD' symétrique du premier par rapport au milieu O de BC (**196**).

Pour évaluer l'aire d'un quadrilatère quelconque, on le décompose par une diagonale en deux triangles dont on évalue séparément les aires. Signalons la propriété suivante facile à établir. Si l'on mène par les quatre sommets des parallèles aux diagonales, on forme un parallélogramme dont les côtés sont parallèles et égaux aux diagonales (**317**), et dont l'aire est double de celle du quadrilatère. En particulier, *l'aire d'un losange est égale au demi-produit des deux diagonales.*

269. — Pour évaluer l'aire d'un polygone, on le découpe en triangles par des diagonales ; mais lorsqu'il s'agit d'arpenter un champ tel que ABCDEFGHI (*fig.* 154) il vaut mieux employer la méthode suivante. Prenons une des plus grandes diagonales AF, abaissons des divers sommets les perpendiculaires B*b*, C*c*, D*d*, E*e*, G*g*, H*h*, I*i* sur cette diagonale, et mesurons les longueurs de ces perpendiculaires ainsi que les longueurs A*b*, *bi*, *ic*, .., *g*F. Cela revient au fond à noter les positions de chaque sommet en mesurant ses deux coordonnées (**140**), les abscisses étant comptées sur AF.

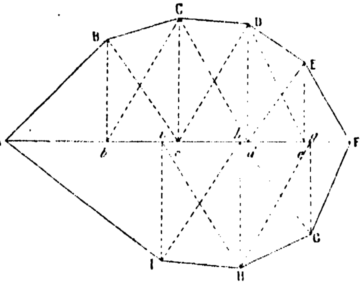


Fig. 154

Le polygone est ainsi décomposé en triangles et trapèzes dont on peut évaluer les aires. Si l'on remarque que l'aire du trapèze B*bc*C est égale à $\frac{Bb \cdot bc}{2} + \frac{Cc \cdot bc}{2}$ c'est-à-dire à la somme des aires des deux triangles B*bc* et C*cb*, on en déduit que l'aire totale du polygone est la somme des aires des triangles AB*c*, *b*C*d*, *c*D*e*, *d*EF, FG*h*, *g*H*i*, *h*IA, triangles dont la loi de formation est évidente.

Dans le cas d'un polygone régulier de n côtés : ABCD ... LA (*fig.* 155), on évalue son aire en remarquant que ce polygone est formé de n triangles isocèles tels que AOB d'aire $\frac{AB \cdot OH}{2}$. L'aire totale du polygone est $\frac{n \cdot AB \cdot OH}{2}$. Mais $n \cdot AB$ est le périmètre du polygone, et par suite, *l'aire d'un polygone régulier est égale au demi-produit de son périmètre par son apothème.*

En appelant R le rayon OA du polygone, on a encore pour l'aire de chaque triangle (**182**) : $\frac{1}{2} R^2 \sin \frac{2\pi}{n}$ et pour l'aire totale $\frac{nR^2}{2} \sin \frac{2\pi}{n}$.

270. Aire du cercle. — Dans le cas particulier où l'on veut avoir l'aire d'un cercle, au lieu de tracer un quadrillage découpant le plan de ce cercle en petits carrés (**264**), il est plus avantageux d'inscrire dans le cercle un polygone régulier ABCD ... LA (**258**) (*fig.* 155), et de faire croître indéfiniment le nombre de ses côtés ; nous admettrons que cette aire polygonale a une limite qui est l'aire du cercle. L'aire de chaque polygone étant le demi-produit de son périmètre par son apothème, on en déduit à la limite pour l'aire du cercle (**262**) :

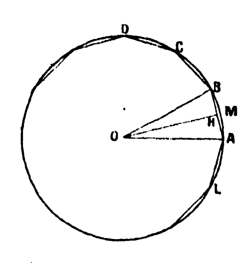


Fig. 155

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2\pi R \cdot R = \pi R^2$$

formule bien connue.

Un raisonnement analogue montrerait que l'aire d'un *secteur* tel que OAMBO est égale au demi-produit de l'arc AMB $= \alpha$, mesuré en radians (**262**), par le carré du rayon $\frac{1}{2} R^2\alpha$. Quant à l'aire du *segment de cercle* AMBA, elle s'obtient en retranchant l'aire $\frac{1}{2} R^2 \sin \alpha$ du triangle OAB de l'aire $\frac{1}{2} R^2\alpha$ du secteur OAMBO, ce qui donne $\frac{1}{2} R^2 (\alpha - \sin \alpha)$.

Si, par exemple, l'arc AB est $\frac{1}{12}$ de circonférence, ABCD ... LA étant un dodécagone régulier, l'aire du secteur est, en supposant le rayon égal à l'unité : $\frac{\pi}{12} = 0,262$. L'aire du triangle OAB est : $\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{4} = 0,250$ (**172**). Enfin, l'aire du segment AMB est $0,262 - 0,250 = 0,012$.

271. Aires des cônes et des cylindres. — C'est par des procédés analogues à ceux que nous avons employés pour l'aire du cercle que nous définirons les aires des corps ronds. Nous les considérerons comme limites d'aires de polyèdres convenablement choisis et nous admettrons que l'on obtient les aires à évaluer.

Remarquons que, de telles aires, étant considérées comme limites d'aires planes, on aura encore dans tous les cas l'importante propriété (**267**) : *deux aires s et S, homothétiques dans le rapport k, sont dans un rapport $\frac{S}{s}$ égal au carré : k^2 du rapport d'homothétie : k.*

Dans un cône, on distingue habituellement l'*aire latérale* qui va du sommet S au cercle de base Γ (*fig.* 156) et l'*aire totale*, obtenue en ajoutant à la précédente l'aire du cercle Γ. L'aire latérale est considérée comme la limite de l'aire latérale d'une pyramide inscrite de sommet S, ayant comme base un polygone régulier ABCD ... LA inscrit dans Γ (**258**). Quand le nombre des côtés de ce polygone augmente indéfiniment, cette aire est égale à n fois l'aire d'une face SAB, soit $n \cdot \frac{AB \cdot SH}{2}$,

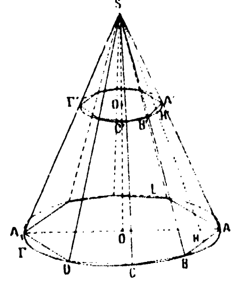


Fig. 156

c'est-à-dire égale au demi-produit du périmètre de base, $n \cdot AB$, par l'apothème SH. Si le nombre des côtés du polygone ABCD ... LA croît indéfiniment, son périmètre tend vers la longueur $2\pi R$ de la circonférence Γ et l'on en déduit pour l'aire

latérale du cône : $S = \frac{2\pi R \cdot SA}{2} = \pi R l$. *L'aire latérale d'un cône est égale au demi-produit de la circonférence de base par l'apothème.* Quant à l'aire totale, elle est par suite : $\pi R l + \pi R^2 = \pi R(R + l)$.

La surface latérale d'une pyramide SABC ... peut se dérouler, ou comme l'on dit se *développer*, suivant une suite de triangles SAB, SBC, ... (*fig.* 157) formant un secteur polygonal régulier. Le périmètre ABC ... A est égal au périmètre du polygone de base, et l'aire du secteur est l'aire latérale de la

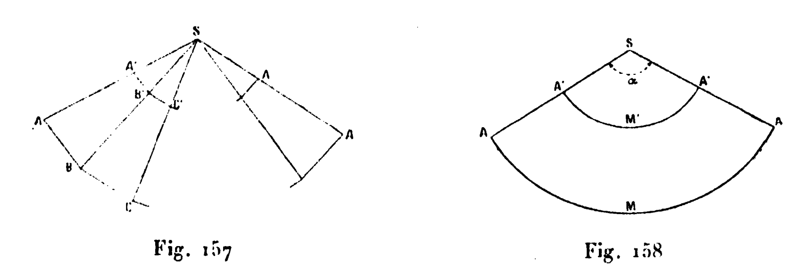


Fig. 157 Fig. 158

pyramide. Si le nombre des côtés du polygone de base augmente indéfiniment, on en déduit que la surface latérale du cône se développe suivant un secteur circulaire SAMA (*fig.* 158) de rayon $SA = l$, l'arc AMA ayant même longueur $2\pi R$ que la circonférence Γ. Si α est, en grades, l'angle ASA du secteur, on a par suite $2\pi l \frac{\alpha}{400} = 2\pi R$, d'où : $\alpha = 400 \frac{R}{l}$. En particulier, si le triangle SAA_1 (*fig.* 156) est équilatéral, on a $l = 2R$ et par suite $\alpha = 200^G$. Le développement a la forme d'une demi-circonférence.

La surface d'un cône pouvant se dérouler sur un plan, on dit que c'est une surface *développable*.

272. — En enlevant dans une pyramide SABCD ... A (*fig.* 156) la partie située au-dessus d'un plan A'B'C' ... A' parallèle à la base, on forme un solide ABCD ... AA'B'C'D' ... A' appelé *tronc de pyramide.* On forme de même un *tronc de cône* en coupant un cône par un plan Γ' parallèle à la base.

L'aire latérale d'un tronc de pyramide régulier est formée de trapèzes tous égaux. On en déduit aisément que cette aire est égale au demi-produit de l'apothème H'H par la somme des périmètres de base. En passant, comme précédemment, au cas limite du tronc de cône, on trouve que *l'aire latérale du tronc de cône est égale au demi-produit de la somme des circonférences de base par l'apothème.* Si R et R' sont les rayons de Γ et Γ' et a l'apothème AA', on a : $S = \frac{(2\pi R + 2\pi R')a}{2} = \pi a(R + R')$.

Le développement de la surface latérale du tronc de pyramide ABCD..AA'B'C'D'..A' ou du tronc de cône ΓΓ' se déduit de façon simple du développement de la surface latérale de la pyramide SABC..A ou du cône SΓ ; on trouve suivant le cas la bande polygonale ABC..AA'B'C'..A' (*fig.* 157) ou la bande circulaire AMAA'M'A' (*fig.* 158).

On calcule parfois de façon différente l'aire latérale du tronc de cône. Prenons un segment de droite AA' (*fig.* 159) qui, en tournant autour d'une droite zz' de son plan (**196**), engendre la surface latérale d'un tronc de cône dont CA et C'A' sont les rayons des cercles de base. L'aire latérale S est donnée par la formule $S = \frac{2\pi(CA + C'A')AA'}{2}$. Si MN est la parallèle à CA passant par les milieux AA' et CC', on sait que (**246**) $MN = \frac{CA + CA'}{2}$ d'où : $S = 2\pi . MN . AA'$; *l'aire latérale d'un tronc de cône est égale au produit de la longueur de la circonférence moyenne par l'apothème.*

Fig. 159

On peut donner encore une autre formule pour cette même aire. Elevons en M la perpendiculaire à AA', perpendiculaire qui coupe zz' en un certain point O et abaissons d'autre part de A' la perpendiculaire A'B sur CA ; A'B est égal à la hauteur CC' du tronc de cône (**220**). Les deux triangles rectangles A'BA et MNO sont semblables (**248**), les deux angles AA'B et NMO ayant leurs côtés respectivement perpendiculaires (**214**). On a par suite : $\frac{MN}{A'B} = \frac{MO}{A'A}$ ou $MN . A'A = MO . A'B = MO . CC'$,

ce qui permet d'écrire l'aire latérale sous la forme : $S = 2\pi . MN . A'A = 2\pi . MO . CC'$. Cette formule n'a que très peu d'importance pratique, mais elle nous permettra plus tard de calculer l'aire de la sphère.

273. — Pour évaluer l'aire latérale d'un cylindre (**238**) (*fig.* 160), on la considère comme la limite de l'aire latérale d'un prisme régulier inscrit tel que ABC..AA'B'C'..A', prisme ayant pour base un polygone régulier dont on augmente indéfiniment la nombre des côtés. Les faces latérales d'un tel prisme sont des rectangles égaux. Si leur nombre est n, l'aire latérale est $n . AB . AA'$. Le périmètre de base étant précisément $n . AB$, on a l'aire latérale en multipliant ce périmètre par la hauteur : $AA' = OO' = h$.

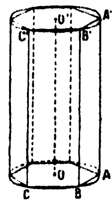


Fig. 160

En passant au cas limite du cylindre, on trouve que *l'aire latérale d'un cylindre est égale au produit de la circonférence de base par la hauteur* $S = 2\pi Rh$. Cette aire est deux fois plus grande que celle du cône de même base et de même apothème.

Quant à l'aire totale, on l'obtient en ajoutant à l'aire latérale la somme des aires des cercles de base : $2\pi Rh + \pi R^2 + \pi R^2 = 2\pi R (R + h)$. Cette aire totale est le double de celle du cône de même base et de même apothème.

La surface latérale d'un prisme régulier se développe suivant un rectangle de hauteur AA' ayant pour base le périmètre du polygone ABC..A. On en déduit que la surface latérale d'un cylindre se développe suivant un rectangle de hauteur AA' ayant une base de même longueur que la circonférence Γ. Le cylindre, comme le cône, est une surface *développable*.

274. Aire de la sphère. — *L'aire d'une zone sphérique est égale au produit de la longueur de la circonférence d'un grand cercle par la hauteur de la zone.* Prenons un cercle de centre O de rayon R (*fig.* 161), qui, en tournant autour de zz', engendre une sphère et deux plans CM, C'M' perpendiculaires à ce diamètre. Entre ces deux plans se trouve une zone sphérique (**228**)

de hauteur $CC' = h$. Nous allons montrer que l'aire de cette zone est égale à $2\pi Rh$.

Nous définirons l'aire de cette zone de façon analogue à l'aire latérale du cône ou du cylindre (**271, 273**). Inscrivons dans l'arc de cercle MM' qui engendre la zone une ligne brisée que, pour simplifier, nous supposerons régulière : MAB ... M'. Dans le mouvement de rotation autour de zz' (**196**), les divers côtés MA, AB,... de cette ligne engendrent les surfaces latérales de troncs de cône de hauteurs CD, DE,... Le tronc de cône engendré par MA a comme aire (**272**) $2\pi . OF . CD$, l'apothème de la ligne brisée étant OF.

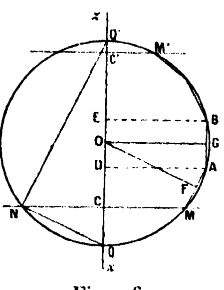


Fig. 161

En exprimant de même les aires des divers troncs de cône, on en déduit pour l'aire totale : $2\pi . OF . CD + 2\pi . OG . DE + ...$, ou, en remarquant que les apothèmes OF, OG,.. sont égales : $2\pi . OF (CD + DE + ..) = 2\pi . OF . CC'$.

Si maintenant, on suppose que le nombre des côtés de la ligne brisée augmente indéfiniment, la limite de l'aire que nous venons de définir s'appelle l'aire de la zone ; on trouve ainsi, en remarquant que OF tend vers le rayon : $S = 2\pi R . CC'$.

Pour déduire de cette formule l'aire de la sphère, il suffit de supposer que C et C' sont en Q et Q', ce qui donne :

$$S = 2\pi R . 2R = 4\pi R^2$$

formule classique : *l'aire d'une sphère est égale à quatre fois l'aire d'un grand cercle de cette sphère.*

On a parfois besoin d'évaluer l'aire d'une *calotte sphérique*, c'est-à-dire d'une portion de sphère située d'un même côté d'un plan sécant. Prenons par exemple la calotte de pôle Q, située au-dessous du plan CM. Elle a comme hauteur CQ et comme aire $S = 2\pi R . CQ$, ou, en remarquant que le triangle QNQ' est rectangle (**235**) : $S = \pi . QQ' . CQ = \pi . \overline{QN}^2$. *L'aire de la calotte sphérique découpée sur une sphère par un compas sphérique*

d'ouverture donnée r est égale à πr^2 et indépendante du rayon de la sphère.

275. Formules concernant les aires. — Nous avons déjà dit que toute formule concernant des longueurs devait être homogène, c'est-à-dire que tous les termes devaient être du même degré (**249**). Cette homogénéité s'étend au cas où l'on a des aires, comme il est facile de le constater sur toutes les formules qui précèdent, pourvu que l'on considère une aire S comme étant du second degré ; c'est ainsi que les formules $S = ah$; $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$; $S = 4\pi R^2, \ldots$ sont homogènes.

Une aire se présente ainsi habituellement comme un produit de deux longueurs. Inversement, il est parfois avantageux de considérer un produit de deux longueurs comme représentant l'aire du rectangle que l'on peut construire avec ces longueurs ; le carré d'une longueur comme l'aire de carré ayant cette longueur pour côté. On peut donner ainsi de nouveaux énoncés pour des relations déjà établies. Par exemple, l'identité : $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ (**86**) peut s'énoncer : le carré ayant pour côté la somme de deux longueurs a et b est équivalent à la somme des carrés ayant pour côtés ces longueurs et de deux rectangles identiques construits avec ces mêmes longueurs. Nous avons d'ailleurs déjà démontré des propositions analogues en nous servant implicitement de la notion d'aire (**6**).

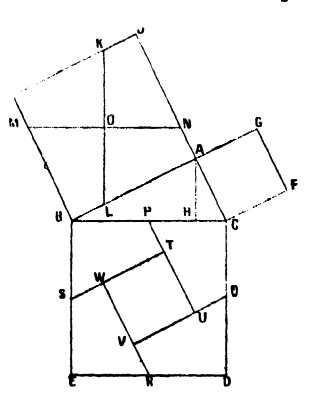


Fig. 162

De même encore les diverses relations métriques concernant les triangles rectangles (**250**) peuvent s'énoncer (*fig.* 162) :

Dans un triangle rectangle ABC, *de hauteur* AH, *le carré dont le côté est* AB *est équivalent au rectangle de côtés* BC *et* BH ; *le carré de côté* AH *équivaut au rectangle de côtés* BH *et* CH.

De même encore le théorème de Pythagore (**251**) peut s'énoncer : *le carré* BCDE *construit sur l'hypoténuse est équivalent à la somme des carrés* ACFG *et* ABIJ *construits sur les deux autres côtés*. Il existe un grand nombre de démonstrations classiques de ce théorème basées uniquement sur la notion d'aire, ou même, comme la suivante que nous donnons à titre d'exemple, sur la décomposition des diverses aires en portions superposables. Menons par le centre O du carré ABIJ des parallèles à BC et AH, ce qui découpe ce carré en quatre quadrilatères identiques. D'autre part, menons par le milieu des côtés du carré BCDE des parallèles à AB et AC, parallèles limitées comme l'indique la figure. Ce carré est décomposé en cinq parties : quatre quadrilatères et un carré. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que ces quatre quadrilatères sont identiques aux quatre quadrilatères qui forment ABIJ, et que le carré central TUVW est identique au carré ACFG.

276. Volumes. — On mesure les *volumes*, comme les aires, en se bornant, pour les corps géométriques, à mesurer quelques dimensions convenablement choisies pour en déduire par le calcul le volume cherché. Une démonstration complètement analogue à celle qui nous a donné l'aire du rectangle permet d'établir que *le volume d'un parallélépipède rectangle est exprimé par le même nombre que le produit des nombres qui mesurent ses trois dimensions, pourvu que l'unité de volume soit le volume du cube construit sur l'unité de longueur*, ce que l'on énonce sous forme abrégée : *le volume d'un parallélépipède rectangle est égal au produit de sa longueur par sa largeur et sa hauteur*. En particulier, *le volume d'un cube est le cube de son arête ;* c'est ainsi qu'un décimètre cube vaut 1 000 centimètres cubes ; un mètre cube vaut 1 000 000 de centimètres cubes, etc...

Ici, comme dans le cas des aires (**264**), on peut évaluer un volume quelconque en le décomposant en petits cubes. Considérons pour cela trois réseaux de plans parallèles équidistants (**211**), rectangulaires deux à deux, et de même écartement a. L'espace est décomposé par ces plans en cubes d'arête a. Tous

ceux de ces cubes qui sont intérieurs au volume considéré forment un polyèdre de volume P égal à $n . a^3$, en désignant par n le nombre de ces cubes.

Si maintenant nous diminuons de moitié l'écartement a des divers plans, nous formons un nouveau polyèdre de volume P', en général supérieur à P, mais inférieur au volume V à évaluer, et ainsi de suite en diminuant chaque fois l'écartement des plans. Nous admettrons que ces volumes P, P' P''... tendent vers le volume V.

On en déduira, en particulier, en refaisant le même raisonnement que pour les aires (**266**) : *deux volumes v et V, homothétiques dans le rapport k, ont un rapport $\frac{V}{v}$ égal au cube : k^3 du rapport d'homothétie : k*, énoncé auquel on peut donner la forme plus intuitive : *si deux volumes v et v_1 sont équivalents, il en est de même de deux volumes V et V_1 respectivement homothétiques de v et v_1 dans le même rapport k*, car, si l'on suppose que v_1 est un cube d'arête a et de volume a^3, et par suite que V_1 est un cube d'arête ka et de volume k^3a^3, on voit que le rapport des volumes de V et v est bien k^3.

Ces diverses propriétés concernant les aires ou les volumes homothétiques servent souvent en pratique. C'est ainsi que, *si l'on double les dimensions d'un corps, sa surface est multipliée par 4 et son volume par* 8. S'il s'agit, pour prendre un exemple classique, de deux corps portés à la même température, le plus gros a emmagasiné 8 fois plus de calories et a une surface de refroidissement qui n'est que 4 fois plus grande ; il se refroidira donc beaucoup moins vite. C'est pour des raisons analogues qu'il est presque impossible de comparer le fonctionnement d'une machine à celui d'un modèle réduit.

277. Volumes des prismes et pyramides. — Le volume d'un parallélipipède rectangle ABCDA'B'C'D' (*fig.* 163) est égal, comme nous l'avons vu (**276**), au produit AB.AD.AA'. En remarquant que l'aire de la base est AB.AD, on voit que *le volume d'un parallélépipède rectangle est le produit de sa base*

par sa hauteur. Nous allons étendre ce résultat à un prisme quelconque.

Menons le plan diagonal DBB′D′ ; on partage ainsi le solide en deux autres solides identiques se déduisant l'un de l'autre par une symétrie d'axe OO′ (**196**). Le volume du prisme droit ABDA′B′D′ est la moitié du volume du parallélépipède, mais sa base est aussi la moitié de celle de ce parallélépipède, ce qui montre bien que son volume est encore le produit de sa base par sa hauteur.

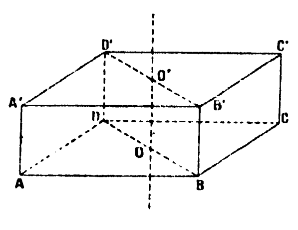


Fig. 163

Le lecteur étendra ce résultat à un prisme dont la base est un triangle quelconque, car tout triangle peut être décomposé en deux triangles rectangles, puis à un prisme dont la base est un polygone quelconque, en employant des raisonnements analogues à ceux qui nous ont permis de déduire les aires de divers polygones de celle du triangle rectangle (**267** et suivants). *Le volume d'un prisme droit à base polygonale est égal au produit de l'aire de base par la hauteur* : $V = Bh$.

Le volume d'un prisme quelconque ABCDE A′B′C′D′E′ (*fig.* 164) à base polygonale se ramène à celui du prisme droit. Prenons en effet une section droite quelconque *abcde* et faisons subir au solide *abcde*ABCDE une translation (**213**) amenant A*a* en A′*a*′ et par suite le polygone ABCDE suivant le polygone A′B′C′D′E′. Le solide total, qui n'a pas changé de volume, est devenu un prisme droit *abcdea*′*b*′*c*′*d*′*e*′ dont la base est le polygone *abcde* et la hauteur *aa*′ = AA′. *Le volume d'un prisme oblique à base polygonale est égal au produit de l'aire d'une section droite par la longueur d'une arête.*

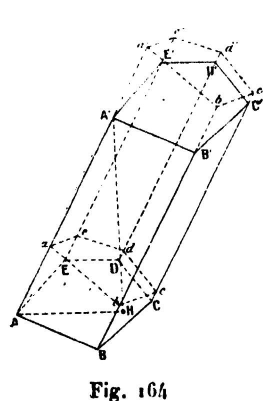


Fig. 164

On peut en déduire une autre expression utile de ce volume.

Remarquons que *abcde* est la projection de l'aire de base ABCDE sur le plan de section droite. Le rapport de ces deux aires est donc cos α (**265**), α étant l'angle des deux plans, ou, ce qui revient au même, l'angle des deux perpendiculaires à ces deux plans menées par le point A′ : AA′ perpendiculaire au plan *abcde* et A′H perpendiculaire au plan ABCDE (**214**). On a donc : V = aire *abcde* . AA′ = aire ABCDE . cos α . AA′. Mais AA′ . cos α est précisément A′H, le triangle AA′H étant rectangle en H. Donc : V = aire ABCDE . A′H ; *le volume d'un prisme est égal au produit de sa base par sa hauteur*. En particulier, *le volume d'un parallélépipède est égal au produit de sa base par sa hauteur* sans que l'on ait besoin ici de supposer que ce parallélépipède soit rectangle.

278. — Le volume de la pyramide triangulaire ou tétraèdre ne se déduit pas de façon immédiate de celui du prisme. Nous allons montrer que le volume V d'une telle pyramide SABC (*fig.* 165) est le tiers du produit W de l'aire de sa base ABC par sa hauteur SH. Remarquons d'abord que ce produit est le même quelle que soit la base choisie, car, si l'on complète le parallélépipède ABCNSPRQ dont AS, AB, AC sont trois arêtes,

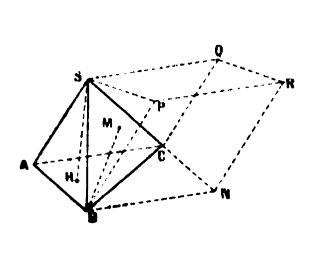


Fig. 165

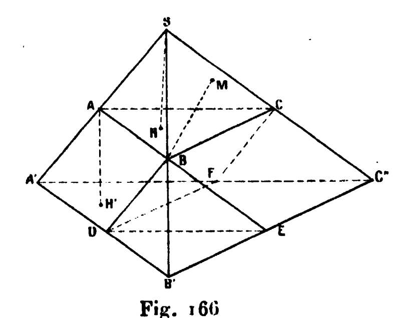


Fig. 166

son volume est 2 . aire ABC . SH ou 2 . aire SAC . BM suivant le choix de la base (**277**). Donc : W = aire ABC . SH = aire SAC . BM.

Ceci posé, considérons la pyramide SABC de volume inconnu V (*fig.* 166) et la pyramide homothétique SA′B′C′ (**245**) que l'on en déduit en portant AA′ = SA ; BB′ = SB et CC′ = SC.

Le rapport d'homothétie étant 2, nous savons que le volume de cette seconde pyramide est 8V (**276**). Cette pyramide SA'B'C'D' peut être décomposée en quatre solides :

1° La pyramide SABC de volume inconnu V.

2° Le prisme ABCA'DF de même base ABC que la pyramide SABC et de même hauteur AH' = SH. Son volume a été désigné par W.

3° La pyramide BDB'E identique à SABC dont elle se déduit par la translation (**213**) qui amène SB en BB'. Son volume est V.

4° Le prisme BDECFC' de base BDE égale à la base SAC de la pyramide SABC et de même hauteur BM. Son volume est W.

En écrivant que le volume total de ces quatre solides : $V + W + V + W$ est égal à 8V, on en déduit immédiatement que $3V = W$, donc le volume V cherché est bien le tiers de W, ce que l'on peut énoncer :

Le volume d'une pyramide est égal au tiers du produit de sa base par sa hauteur $V = \frac{1}{3} Bh$. Cette propriété, établie seulement pour une pyramide triangulaire, s'étend au cas d'une pyramide polygonale quelconque, car il suffit de la décomposer en pyramides triangulaires puis de faire la somme de leurs volumes en remarquant qu'elles ont toutes la même hauteur. Il en résulte que *deux pyramides de même base et de même hauteur sont équivalentes.*

On déduit encore de ce qui précède, par des raisonnements d'ailleurs assez longs, les trois propriétés suivantes que nous nous bornerons à énoncer : *le volume d'un tronc de pyramide à bases parallèles est la somme des volumes de trois pyramides ayant comme hauteur commune la hauteur* h *du tronc et pour bases respectivement, la base supérieure* B, *la base inférieure* b *et une moyenne proportionnelle entre les deux bases* $\sqrt{Bb}$: $V = \frac{1}{3} h(B + b + \sqrt{Bb})$.

Le volume limité dans un prisme triangulaire par un plan sécant quelconque, c'est-à-dire *le volume d'un tronc de prisme triangulaire est égal à la somme des volumes de trois pyramides*

ayant comme base commune la base inférieure et comme sommets les trois sommets du triangle formant la base supérieure.

Le volume d'un solide ayant deux bases polygonales d'aires B *et b, situées dans des plans parallèles, et limité latéralement par des faces planes, triangles ou trapèzes, est donné par la formule :* $V = \frac{h}{6}(B + b + 4\beta)$, *en désignant par h la hauteur et par* β *l'aire de la section du solide par un plan équidistant des deux plans des bases.* Cette formule, connue sous le nom de *formule des trois niveaux*, s'applique en particulier à la pyramide, au tronc de pyramide, aux tas de cailloux des bords des routes, etc.

279. Volume des corps ronds. — Du volume de la pyramide régulière on déduit, par des considérations de tous points analogues à celles qui nous ont servi pour les aires, le volume du cône ; du volume du tronc de pyramide on déduit de même celui du tronc de cône, etc... Il nous suffira d'énoncer les résultats auxquels on est ainsi conduit :

Le volume d'un cône est égal au tiers du produit de sa base par sa hauteur : $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$.

Le volume d'un tronc de cône est égal à la somme des volumes de trois cônes ayant comme hauteur commune la hauteur du tronc, et comme bases respectives la base supérieure, la base inférieure et une moyenne proportionnelle entre les deux bases :

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h + \frac{1}{3}\pi r^2 h + \frac{1}{3} h\sqrt{\pi R^2 \cdot \pi r^2} = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr).$$

Le volume d'un cylindre est égal au produit de sa base par sa hauteur : $V = \pi R^2 h$.

Pour évaluer le volume d'une sphère, prenons un grand cercle de cette sphère et un polygone régulier inscrit ABC ... A′, dont A et A′ sont deux sommets diamétralement opposés (*fig.* 167). Nous allons établir d'abord que le volume engendré par ce polygone régulier en tournant autour de AA′ (**196**) est égal au produit de sa surface par le tiers de l'apothème.

Considérons, en effet, le volume engendré dans ce mouvement de rotation par un des triangles OAB, OBC, ..., par exemple

OBC, et divisons en n parties égales les cercles qu'engendrent les points B et C ; soient B, B′ ; C, C′ deux sommets consécutifs de chaque polygone. Les n pyramides ayant pour bases des trapèzes tels que CC′B′B ont un volume total égal au tiers du produit de la somme de leurs bases par la hauteur de l'une quelconque d'entre elles. Il est facile de voir que, si le nombre n des côtés des deux polygones croît indéfiniment, la limite de la somme des volumes de ces pyramides, c'est-à-dire le volume engendré par BOC dans sa rotation, est égal au tiers du produit de la surface engendrée par BC par l'apothème OP. En refaisant le même raisonnement pour tous les côtés du polygone ABC ... A′, on voit que le volume total est bien le tiers du produit de la surface engendrée par ce polygone par l'apothème.

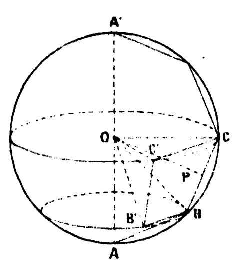


Fig. 167

Si nous supposons maintenant que le nombre des côtés de ce polygone croisse indéfiniment, et que par suite la surface engendrée tende vers celle de la sphère, on en déduit que le volume de la sphère est le tiers du produit de sa surface (**274**) par le rayon : $V = \frac{4\pi R^2 \cdot R}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3$. On introduit parfois dans cette formule le diamètre $D = 2R$; elle devient alors : $V = \frac{1}{6}\pi D^3$. La « formule des trois niveaux » s'applique au volume de la sphère, comme il est facile de le vérifier. On démontre même qu'elle s'applique encore au volume d'une portion de sphère limitée à deux plans parallèles.

280. Mesure pratique des longueurs, aires et volumes. — On a souvent à évaluer des longueurs d'arc de courbe, ou encore à mesurer des aires ou des volumes limités par des contours de formes non géométriques. Des méthodes empiriques peuvent seules être appliquées; nous allons indiquer rapidement les plus simples de ces méthodes.

La mesure de la longueur d'un arc de courbe se fait souvent à l'aide d'un *curvimètre*, petite roulette, avec ou sans compteur

de tours. On l'emploie surtout dans la lecture des cartes pour mesurer la longueur d'une route.

Parfois aussi, on prend un compas ayant une ouverture fixe, un demi-centimètre par exemple, que l'on déplace tout le long de la courbe AA' (*fig.* 168), successivement en AB, BC, CD, DE, EA'. On voit ici que la longueur approximative de la courbe est 2 centimètres et demi. Cette méthode n'est précise que si l'ouverture du compas est assez petite. Il est préférable d'employer le procédé suivant : une bande de papier transparent porte une droite Δ que l'on fait rouler sur la courbe ; on immobilise pour cela à l'aide d'une pointe fine un point de cette droite en A, puis on la fait tourner d'une petite quantité autour de A jusqu'à ce qu'elle forme en AM une petite corde de la courbe. On immobilise ensuite le point M et on la fait tourner d'un petit angle jusqu'en MN et ainsi de suite, les divers points étant M, N, P, Q, R, S, A'. En pratique, on les prend d'autant plus rapprochées que le tracé considéré est plus courbé. La droite est venue en A'α et le point de Δ qui était primitivement en A est venu en α. La longueur cherchée est approximativement αA', soit ici $2^{cm},8$.

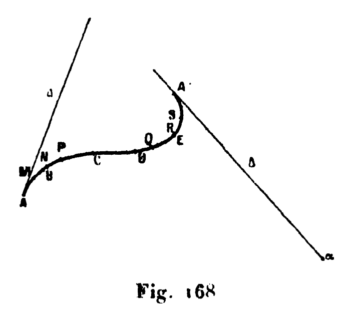


Fig. 168

281. — Pour la mesure des aires planes, il y a plusieurs méthodes employées en pratique. On peut découper la surface tracée sur une feuille de métal, puis la peser. On peut encore employer des appareils spéciaux : *planimètres* ou *intégrateurs* que nous ne pouvons décrire ici.

Nous avons déjà dit qu'on pouvait avoir une valeur approchée de l'aire en la supposant tracée sur du papier quadrillé (**264**). En pratique on prend du papier quadrillé transparent.

D'autres méthodes sont basées sur la mesure des ordonnées (**140**) d'un certain nombre de points de la courbe. Nous nous

bornerons à donner sans les justifier les énoncés des deux principales. Soit à évaluer une aire telle que AA'a'Γa (*fig.* 169)

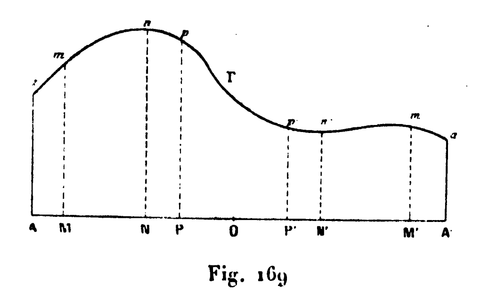


Fig. 169

limitée à deux parallèles Aa et A'a', une perpendiculaire commune AA' et une courbe Γ. Posons AA' = 2a, et prenons les points M, M'; N, N'; P, P' deux à deux équidistants du milieu O de AA' et définis par :

$$\overline{OM'} = -\overline{OM} = 0{,}866 \cdot a \qquad \overline{ON'} = -\overline{ON} = 0{,}422 \cdot a$$
$$\overline{OP'} = -\overline{OP} = 0{,}267 \cdot a$$

et menons les ordonnées M*m*, N*n*, ... M'*m'* que l'on mesure. L'aire cherchée est, d'après la *formule de Tchebitcheff*, approximativement égale au produit par AA' = 2*a* de la moyenne des six ordonnées c'est-à-dire du sixième de leur somme. On trouve ici $\dfrac{5(1{,}9 + 2{,}3 + 2{,}15 + 1{,}1 + 1{,}05 + 1{,}1)}{6} = 8^{cm^2}$.

Cette formule s'applique encore au cas où les ordonnées Aa et A'a' sont nulles (*fig.* 170). Dans ce cas particulier, nous donne-

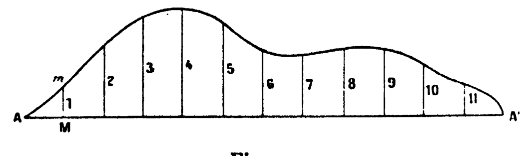


Fig. 170

rons une autre formule, qui d'ailleurs s'étendrait au cas général avec de légères modifications. Divisons AA' en un nombre pair de parties égales, chacun des segments tels que AM étant égal

à h. La méthode que nous avons donnée pour une aire polygonale (**269**) nous donne ici, comme valeur approchée de l'aire, le produit par h de la somme des ordonnées en assimilant le contour à un polygone. Mais il est bon d'ajouter un terme correctif : $\frac{h}{3}(I - P)$, I désignant la somme des ordonnées de rang impair (telles que Mm) et P la somme des ordonnées de rang pair. Ceci conduit à prendre pour l'aire la *formule de Simpson* : $\frac{2h}{3}(2I + P)$. On a ici : $\frac{2.0,5}{3}(2.4,7 + 4,4) = 4^{cm^2},60$.

Il est d'ailleurs aisé de voir que l'on peut toujours découper une aire en portions auxquelles on pourra appliquer une des deux formules qui précèdent.

Lorsqu'il s'agit d'aires gauches, il y a peu de méthodes possibles. Signalons cependant la suivante qui est parfois employée, quoiqu'elle soit assez peu précise. On pèse le corps dont on veut évaluer la surface extérieure, puis on le recouvre d'une couche de peinture homogène et on le pèse à nouveau. La même opération effectuée sur un corps de surface extérieure connue permet de se rendre compte du poids de la peinture par unité de surface et par suite de calculer l'aire cherchée.

L'évaluation des volumes se fait ordinairement pour les corps solides de forme quelconque, soit en les pesant, si leur densité est connue, soit en les immergeant dans un liquide dont on évalue le volume déplacé, ce qui peut se faire de plusieurs manières. Pour les terrassements, déblais, remblais, tas de sable ou de pierres, on emploie souvent « la formule des trois niveaux » (**278**).

Les volumes des tonneaux se calculent par un assez grand nombre de formules empiriques. L'une des plus simples est la suivante : $V = \frac{5}{8} L^3$, en désignant par L la distance OA de la bonde au fond du tonneau (*fig.* 171), distance qui se mesure à l'aide d'une baguette. Les tonneaux sont en général homothétiques les uns des autres. Leurs dimensions

Fig. 171

sont proportionnelles aux suivantes : AB = 16, OP = 18 ; AC = 21 et par suite OA = 36 environ. Pour un hectolitre, on a AB = 87^{cm}.

Exercices. — Nos 108, 109, 110, 111, 112, 211, 213, 215, 229, 248, 249, 250, 251, 252, 253, 266, 356, 357, 359, 362, 363, 365, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 384, 385, 386, 387, 388, 389, 390, 391, 392, 393, 394, 395, 396, 397, 398, 399, 400, 401, 402, 421, 422, 423, 424, 425, 426, 442.

CHAPITRE VI

CONSTRUCTIONS GRAPHIQUES

282. Instruments de dessin. — A côté d'une partie théorique, la plupart des branches des mathématiques comprennent des applications pratiques. Les plus importantes de ces applications sont, pour l'arithmétique, les calculs numériques (**52** et suivants) et, pour la géométrie, les *constructions graphiques* utilisées dans toutes les branches de l'industrie.

Ces constructions se font, comme on le sait, à l'aide d'instruments spéciaux dont les deux principaux sont la *règle* et le *compas* qui permettent le tracé des droites et des cercles. Leur usage est bien connu du lecteur ; aussi nous bornerons-nous à leur sujet à de très brèves indications.

La règle, comme l'équerre, est en buis ou en ébonite noire ou rouge. Ces instruments doivent être vérifiés avec soin et fréquemment, les bords devant être rectilignes. Pour des travaux précis, *l'équerre ne doit jamais servir à mener des perpendiculaires à une droite, mais seulement des parallèles à une droite* (**213**). Il est commode d'ailleurs d'avoir au moins deux équerres, l'une allongée de 40 centimètres environ de longueur et l'autre plus petite « à 45° » de 15 centimètres environ. Il faut nettoyer assez fréquemment ces instruments en les frottant sur leur partie plate avec du papier de verre.

Les compas pour être de bonne qualité doivent avoir des charnières d'acier ; leur fermeture doit être douce et régulière,

sans à-coups. La pointe fine du compas comporte en général un épaulement l'empêchant de s'enfoncer trop profondément dans le papier. Il est commode d'ailleurs de marquer à l'avance le point où il faut poser la pointe du compas à l'aide d'une aiguille fine emmanchée.

Il est bon d'avoir deux crayons, l'un dur que l'on taille à plat, et non pas en pointe, pour le tracé des traits de construction, et l'autre assez mou, qui sert à mettre des lettres ou à souligner des données ou des résultats importants avant la mise à l'encre. Le dessin terminé au crayon doit déjà faire image.

Dans un dessin à l'encre de Chine, les traits, tracés avec des instruments et non à la main, doivent être de grosseur uniforme, l'encre employée étant en outre suffisamment noire. Les lignes de construction sont en général en traits rouges fins. Les traits doivent être strictement limités à leur partie utile.

283. — La précision d'une construction dépend d'un assez grand nombre de facteurs, tels que la grosseur des traits, les irrégularités des arêtes de la règle et de l'équerre, la finesse de la pointe du compas, etc... L'importance de quelques-uns d'entre eux varie avec l'habileté du dessinateur. C'est ainsi qu'un point P déterminé par l'intersection de deux droites est d'autant mieux connu que l'angle de ces droites est plus voisin d'un angle droit. Si cet angle est très aigu, les droites joignant ce point P à un autre point du plan seront en général très mal déterminées. De même encore, une droite joignant deux points n'est tracée avec une certaine précision que si les deux points sont éloignés d'au moins un ou deux centimètres. Il est donc possible, en tenant compte de ce qui précède, d'augmenter la précision d'un tracé par un choix convenable des constructions auxiliaires.

Un dessinateur d'une habileté moyenne obtient approximativement pour les constructions ordinaires d'une épure la précision de 1 centième, c'est-à-dire, par exemple, que pour un dessin ayant comme dimensions approximatives 10 centimètres sur 10 centimètres dans sa portion utile, un point quelconque sera

placé à moins de 1 millimètre de sa position exacte. Les bons dessinateurs obtiendront d'ailleurs une précision beaucoup plus grande.

284. — Une construction peut ordinairement être effectuée par plusieurs méthodes différentes; celles dont la justification comporte les raisonnements les plus courts et les plus clairs sont souvent celles qui nécessitent les constructions les plus simples, mais il est facile de comprendre qu'il n'en soit pas toujours ainsi. En géométrie, on se préoccupe surtout de donner des constructions faciles à retenir, tandis qu'en *géométrographie* on cherche les constructions les plus rapides. En pratique, les tracés les plus rapides ne sont pas toujours les plus avantageux, car certains d'entre eux, quoique très simples comme exécution, sont peu naturels et ont l'inconvénient de surcharger la mémoire. Aussi les constructions que nous donnerons plus loin ne seront pas toujours les plus rapides pour résoudre le problème donné; cependant, quand elles différeront de la *construction géométrographique* correspondante, leur complication ne sera pas beaucoup plus grande.

Il existe des règles précises pour évaluer le degré de complication d'un tracé; nous ne les donnerons pas ici, nous bornant à faire remarquer que, pour une construction un peu longue, on peut, sans erreur sensible, *prendre le nombre de droites ou de cercles à tracer comme mesure du degré de complication de cette construction.* Après chacune des constructions de géométrie plane qui suivent, nous mettrons ce nombre entre crochets en caractères gras.

Remarquons enfin, pour terminer ces généralités, qu'un dessinateur habile utilise autant que possible les constructions déjà faites pour simplifier celles qui restent à faire. En outre, il fait en même temps toutes les constructions analogues, en traçant par exemple tous les cercles de même rayon les uns à la suite des autres quand leurs centres sont connus, etc...

285. Constructions usuelles. — Une construction fondamentale est celle qui consiste à *mener par un point* P *une paral-*

lèle ou une perpendiculaire à une droite donnée Δ. La parallèle se mène à l'aide de l'équerre (**213**), et il suffit pour cela que la droite Δ soit donnée par deux points sans qu'il soit utile de la tracer [**1**]. Quant à la perpendiculaire abaissée d'un point P sur Δ, on l'obtient en traçant (*fig.* 172) deux cercles quelconques de centre A et B sur Δ, cercles qui se coupent en un nouveau point P′ de la perpendiculaire cherchée (**206, 232**) [**3**]. La même construction donne, comme on le voit, le symétrique P′ d'un point P par rapport à une droite Δ (**233**) [**2**].

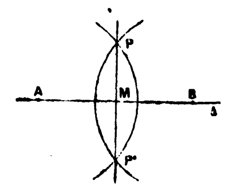


Fig. 172

Si l'on veut élever une perpendiculaire à une droite Δ, en un point M de cette droite (*fig.* 173), on tracera un cercle quelconque Γ passant par M et recoupant Δ en N. Le diamètre de N coupe Γ en un point P de cette perpendiculaire, puisque l'angle PMN est inscrit dans une demi-circonférence (**235**) [**3**]. Dans le cas particulier où cette perpendiculaire doit passer par le milieu d'un segment AB de Δ (*fig.* 172), on trace avec A et B comme centre deux cercles de même rayon dont la corde commune est la perpendiculaire cherchée [**3**]. La construction du *milieu d'un segment* AB résulte de ce qui précède [**3**].

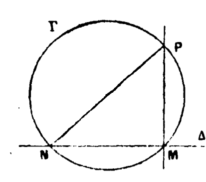


Fig. 173

Les applications de cette construction sont très nombreuses. Pour *construire un cercle quelconque passant par deux points* A *et* B, on trace avec un même rayon deux cercles de centre A et B se coupant en O; le cercle de centre O ayant même rayon que les précédents répond à la question [**3**]. Pour *construire un cercle de diamètre donné* AB, on remarque que son centre est le milieu de AB [**4**].

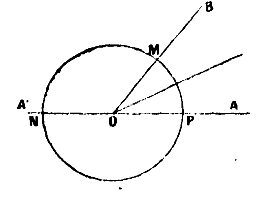


Fig. 174

On a souvent besoin de *construire la bissectrice d'un angle* AOB (*fig.* 174). On décrit un cercle quelconque de centre O,

cercle qui coupe OB et OA' en M et N. La bissectrice cherchée est la parallèle menée par O à MN (**214**) [**2**]. Si l'on veut *prendre le milieu d'un arc* MP donné sur un cercle tracé, il vaut mieux, au lieu d'utiliser la construction précédente, élever une perpendiculaire au milieu de la corde MP, perpendiculaire qui passe au milieu de l'arc (**226**) [**3**].

Enfin, citons encore comme construction fondamentale la suivante. *Étant donnés un angle* ABC *et une droite* Ox, *mener en* O *une droite* Oy *telle que l'angle* xOy *soit égal à l'angle* ABC (*fig.* 175). Deux cercles quelconques de même rayon, de centres O et B, coupent BA, BC et Ox en P, Q et M. Il suffit de prendre sur le cercle de centre O un arc MN égal à l'arc PQ pour avoir un point N de Oy [**4**]. Si l'angle ABC est donné en degrés ou en grades, on se sert du *rapporteur*, instrument peu précis de graduation empirique ; cependant certains arcs particuliers tels que 15°, 30°, 45°, 60°, 75°, 90°, peuvent être construits de façon plus exacte sans le secours du rapporteur. Indiquons par exemple les constructions relatives aux angles de 45° ou 50^{γ} et 60° ou $66^{\gamma}\frac{2}{3}$. Pour *construire un angle de* 45° *ou* 50^{γ}, on élève une perpendiculaire quelconque AB à Ox (*fig.* 176) et l'on porte sur cette perpendiculaire AB = AO ; l'angle AOB vaut un demi-angle droit (**219**) [**5**]. Si l'on voulait *construire un angle de* 60°, on tracerait deux cercles de centre O et A de rayon OA se coupant en un certain point M ; l'angle MOx vaudrait 60° (**219**) [**3**].

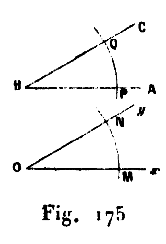


Fig. 175

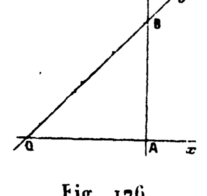


Fig. 176

286. — Ces diverses constructions vont nous permettre de construire un triangle connaissant trois éléments convenablement choisis (**183**, **198**).

Pour *construire un triangle dont on connaît un côté a et les deux angles adjacents* B *et* C, il suffit de mettre en place les

éléments donnés [9]. Il en est de même pour un *triangle dont on connaît deux côtés a, b et l'angle compris* A [7]. Ces constructions sont toujours possibles.

Si l'on se donne *deux côtés a, c et l'angle A opposé à l'un d'eux* (*fig.* 177), on construit d'abord un angle xAy égal à A et l'on porte sur Ay une longueur $AC = b$. Le sommet inconnu B est sur Ax, d'une part, et, d'autre part, sur un cercle de centre C, de rayon $CB = a$ [7]. On peut avoir ainsi, comme dans le cas de figure considéré, deux solutions donnant les triangles ACB et ACB′ qui répondent à la question. Quand l'angle A est aigu, on voit qu'il n'y a pas de solutions si $CB = b$ est inférieur à CH ; il y en a deux si CB est compris entre CH et $CA = b$; et enfin une seule acceptable si CB est plus grand que CA (**225**). Si l'angle A est obtus, on verra de même qu'il n'y a de solution acceptable que si CB est supérieur à CA.

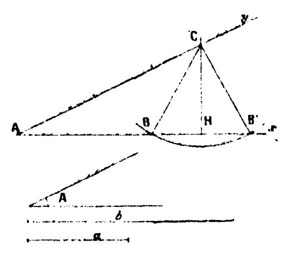


Fig. 177

Si l'on se donne les *trois côtés a, b, c* du triangle à construire, on prendra un segment $AB = c$ et l'on décrira le cercle de centre A de rayon $AC = b$ et le cercle de centre B de rayon $BC = a$ qui coupe le premier au sommet C cherché [6]. La construction n'est possible que si le plus grand côté est inférieur à la somme des deux autres (**205**).

Pour *construire un triangle rectangle dont on connaît un côté de l'angle droit b et l'angle aigu adjacent* C [6], ou *les deux côtés de l'angle droit b et c* [7], il suffit de mettre en place les données. Si l'on se donne *un côté b et l'hypothénuse a* (*fig.* 178), on porte sur une même droite $CA = AD = b$ et de C et D comme centres, avec pour rayon a, on décrit des arcs de cercle qui se coupent en B. Le triangle ABC est le triangle cherché [6]. La construction n'est possible que si a est supérieur à b.

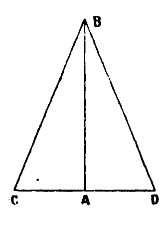


Fig. 178

Enfin, supposons que l'on donne *l'hypoténuse a et un angle*

adjacent C. On construit cet angle en BCA (*fig.* 178), puis on porte CB = a et l'on abaisse de B ainsi défini une perpendiculaire BA sur CA [**6**].

287. — Les mêmes constructions fondamentales ont un grand nombre d'autres applications. C'est ainsi qu'elles donnent immédiatement les points remarquables d'un triangle. Le *centre de gravité* (**224**) se détermine à l'aide de deux médianes [**7**]. Le *centre du cercle inscrit* (**206**) à l'aide de deux bissectrices [**4**]. Le *centre de cercle circonscrit* à l'aide de deux médiatrices (**206**), ou perpendiculaires aux milieux des côtés [**5**]. Quant à l'*orthocentre* (**224**), on l'obtient en construisant le cercle ayant un côté comme diamètre, cercle qui coupe les deux autres côtés suivant des pieds de hauteur (**235**) [**6**].

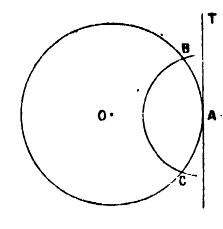


Fig. 179

Appliquons enfin ces diverses constructions au tracé des tangentes (**229**) à un cercle donné. La *tangente à un cercle en un point* A *de ce cercle* (*fig.* 179) s'obtient en coupant le cercle donné en deux points B et C par un cercle quelconque de centre A. La tangente en A est parallèle à BC (**226**) [**2**].

Si l'on veut *mener à un cercle donné* F *les tangentes issues*

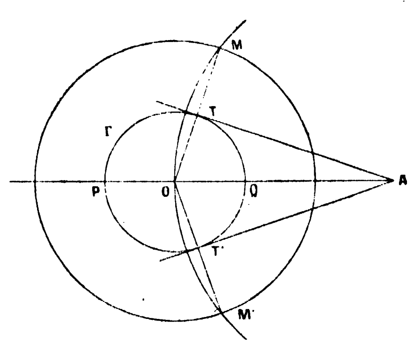


Fig. 180

d'un point A *donné* et déterminer les points de contact T, T' (*fig.* 180), il est commode de construire les symétriques M

et M′ (**196**) de O par rapport à ces tangentes, symétriques qui se trouvent, d'une part, sur le cercle de centre O de rayon OM = OM′ = PQ double de celui de Γ et, d'autre part, sur le cercle de centre A et de rayon AO. Les points où les droites OM et OM′ coupent Γ donnent T et T′ que l'on joint à A [**7**]. Il y a deux tangentes si A est extérieur au cercle Γ. Le cercle de centre A de rayon AT est d'ailleurs orthogonal au cercle Γ donné (**255, 293**).

Pour *mener à un cercle* Γ *donné une tangente parallèle à une droite donnée*, on abaisse du centre de Γ une perpendiculaire sur la droite donnée (**226**) ce qui détermine les points de contacts avec le cercle Γ des tangentes répondant à la question [**5**].

288. Construction de cercles. — Un cercle peut être tracé si l'on a son centre et son rayon. Lorsque *le centre d'un cercle est donné, mais non son rayon*, il suffit pour pouvoir le tracer d'en connaître un point ou une tangente. Dans ce dernier cas, on détermine le point de contact en abaissant du centre une perpendiculaire sur la tangente donnée (**229**) [**4**].

Si *le rayon* R *est donné, mais non le centre* O, on peut se donner en outre, pour achever de déterminer le cercle, soit deux points A et B, soit un point A et une tangente D, soit enfin deux tangentes D et Δ. Envisageons ces diverses hypothèses. Dans le premier cas on construit, avec A et B comme centres et R comme rayon, deux cercles qui se coupent au centre O cherché [**3**]. Il y a d'ailleurs deux solutions si la distance AB n'est pas supérieure à 2R.

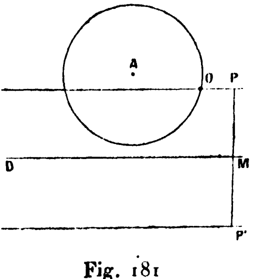


Fig. 181

Si l'on se donne un point A et une tangente D (*fig.* 181), le centre O cherché est d'abord sur le cercle de centre A de rayon R ; d'autre part, il est à la distance R de D (**224**). Elevons donc une perpendiculaire quelconque MP à D, puis portons sur cette perpendiculaire MP = MP′ = R. Le centre O cherché est sur l'une des parallèles à D menées par P ou P′ [**7**]. On voit qu'il

peut y avoir au plus deux solutions. Il n'y en a pas si la distance de A à D est supérieure à 2R.

Enfin, si l'on se donne deux tangentes D et Δ se coupant en A (*fig.* 182), on trace d'abord comme dans le cas précédent une parallèle à la distance R de D. Elle coupe Δ en A'; on porte A'O = A'A. Le point O est un des centres cherchés, car le triangle AA'O est isocèle et par suite O est sur la bissectrice de l'angle en A (**214**) [**7**]. Il y a toujours quatre solutions.

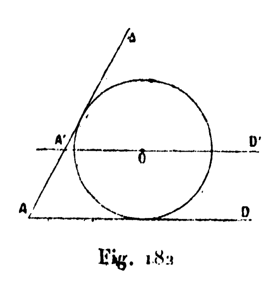


Fig. 182

289. — Si *l'on ne se donne ni le centre, ni le rayon*, le cercle sera néanmoins déterminé si l'on en connaît par exemple : 1° trois points ; 2° deux points et une tangente ; 3° un point et deux tangentes ; 4° trois tangentes. Examinons ces divers cas.

1° Pour *tracer un cercle passant par trois points* A, B, C, on remarque que c'est le cercle circonscrit au triangle des trois points et l'on sait construire son centre (**287**) [**6**]. Il y a un cercle et un seul répondant à la question, à moins que les trois points ne soient en ligne droite.

2° Cherchons à *tracer un cercle passant par deux points* A *et* B *et tangent à une droite donnée* D (*fig.* 183). Le centre du cer-

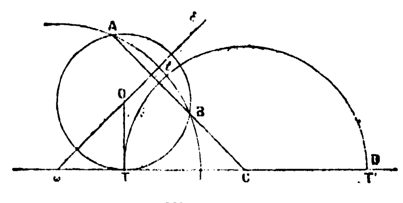


Fig. 183

cle cherché doit se trouver sur la perpendiculaire δ au milieu de AB ; construisons cette droite qui coupe D en ω et joignons AB. Le point de contact T cherché est tel que $\overline{CT}^2 = CA \cdot CB$ (**253**), ce qui montre que CT a la même longueur pour toutes les tangentes issues de C aux divers cercles passant par A et B. On construit par exemple CT en prenant le cercle de centre ω

passant par A et B et l'on cherche, comme nous l'avons dit plus haut, le point de contact t de la tangente à ce cercle issue de C. On rabat Ct en CT et CT′ sur D. Le centre O du cercle tangent à D en T est sur la perpendiculaire en ce point à D (**229**), perpendiculaire que l'on construit en la considérant comme tangente en T au cercle déjà tracé qui a C pour centre et Ct pour rayon [**11**]. On construirait de même le cercle tangent en T′. Il y a deux solutions, si A et B sont d'un même côté de D. Si AB est parallèle à D, le point où δ coupe D est évidemment le point de contact de ce cercle avec D ; le cercle cherché est alors déterminé par trois points [**6**]. Si AB est perpendiculaire à D, le rayon du cercle est la distance du milieu de AB à D [**6**].

3° Pour *tracer un cercle passant par un point* A *et tangent à deux droites* D *et* Δ, on remarque (*fig.* 184) que si Γ est le

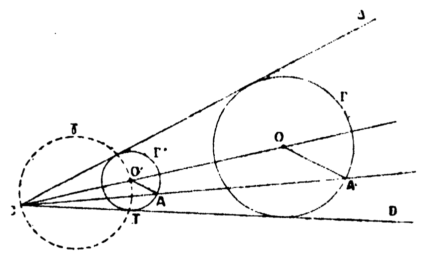


Fig. 184

cercle cherché et Γ′ un cercle homothétique par rapport au point C de rencontre de D et Δ, deux points A et A′ homothétiques correspondent à des rayons OA et O′A′, qui sont parallèles (**246, 293**). On construit d'abord un cercle Γ′ quelconque et l'on en déduit Γ à l'aide de la remarque qui précède, d'où la marche à suivre : on trace la bissectrice de l'angle DCΔ (**285**) et un cercle quelconque γ de centre sur cette bissectrice et passant en C cercle qui recoupe CD en T′. Le cercle de centre T′ de rayon O′T′ est pris comme cercle Γ′. La droite CA le coupe en A′. Il suffit de mener AO parallèle à A′O′ pour avoir le centre O du cercle Γ cherché [**7**]. Il y a toujours deux solutions, comme on le voit, puisqu'il y a deux points de rencontre de OA avec Γ′. Si D et Δ sont parallèles, on remarque que le centre O cherché

est sur une parallèle à D et Δ, que l'on construit en partant d'une perpendiculaire commune à ces deux droites. On achève de déterminer le point O en remarquant que le rayon du cercle cherché est connu et qu'il passe par un point A connu [**8**]. Il y a deux solutions si le point A est entre D et Δ.

4° Pour *tracer un cercle tangent à trois droites* formant un triangle ABC, on remarque que le centre O d'un tel cercle est au point de rencontre de deux bissectrices intérieures ou extérieures (**229**) ; le cercle est alors déterminé par son centre et une tangente (**288**) [**6**]. Il y a quatre cercles répondant à la question. Si deux des droites sont parallèles, on construira de façon complètement analogue l'un quelconque des deux cercles qui répondent à la question [**6**].

290. Constructions relatives aux arcs et aux segments. — *Partager un arc de cercle donné en n parties égales* est un problème qui a déjà été traité pour $n = 2$ (**285**), et qui pour n supérieur à 2 est impossible à la règle et au compas, sauf dans quelques cas très particuliers. Il en est de même du problème qui consiste à *rectifier un arc de cercle*, c'est-à-dire à construire un segment rectiligne ayant la même longueur. Voici une solution approximative de ce dernier problème pour un arc AB (*fig.* 185) suffisamment petit. On porte sur le diamètre AO une longueur QP = QO = R ; la tangente en A est coupée en B′ par PB. La longueur cherchée est AB′ [**1**]. Cette construction, que nous ne justifierons pas, donne pour des arcs inférieurs à 60° une erreur relative qui n'atteint pas un centième et par suite ne dépasse pas les erreurs dues au tracé. On pourrait en déduire la division de l'arc AB en n parties égales, en prenant le $n^{\text{ième}}$ de AB′ en AM′ (**291**), puis joignant PM′ qui donne en AM l'arc cherché, mais il vaut mieux procéder par tâtonnements. Cependant, pour $n = 3$, on a une solution approximative du problème connu sous le nom de *trisection de l'angle*, en remarquant que, sans avoir d'ailleurs besoin de

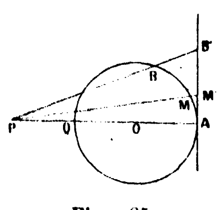


Fig. 185

tracer PB, il suffit de lui mener par O une parallèle qui coupe AB′ au tiers [**5**].

Si l'on veut *construire une valeur approchée de* π, c'est-à-dire de la longueur d'une demi-circonférence Γ de rayon 1 (**262**) (*fig.* 186), au lieu de déduire cette valeur de la construction ci-dessus, il est plus rapide et plus exact de procéder comme il suit : on trace avec le même rayon 1 une circonférence dont le centre A est sur Γ, puis une circonférence de centre en B point commun aux deux premières. Si l'on porte sur la corde AC ainsi déterminée une longueur AE = DB′, on a en CE une valeur approchée de π, car $AC = \sqrt{3}$; $AE = DB' = \sqrt{2}$ (**259**) et par suite $CE = \sqrt{3} + \sqrt{2} = 3{,}1463...$ valeur approchée de π à un six-centième près [**1**].

La *construction d'un polygone régulier de n côtés inscrit dans un cercle donné* Γ se rattache immédiatement à la division de la circonférence en n parties égales et est par suite en général impossible.

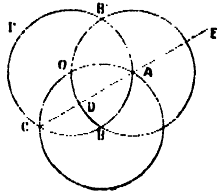


Fig. 186

Pour $n = 3$, on a (*fig.* 186) en BB′ le côté du triangle équilatéral inscrit, ce qui permet de le tracer [**5**]. Le carré peut se construire, avec comme côté DB′ ; il y a d'ailleurs plusieurs méthodes permettant de le tracer [**7**]. La construction de l'hexagone inscrit est immédiate, son côté étant égal au rayon de Γ [**7**].

291. — On a souvent besoin de construire un segment x relié à des segments connus a, b, c, ... par des formules telles que $x = \frac{a}{2}$, $x = \frac{a}{3}$, ... $x = a\sqrt{2}$; $x = a\sqrt{3}$ ... ; $x = \frac{ac}{b}$; $x = \sqrt{ab}$; etc... Nous allons indiquer comment on procède dans les principaux cas.

Si n est entier, construire $x = \frac{a}{n}$ revient à *diviser une longueur a donnée en n parties égales*. Si $OA = a$ (*fig.* 187) est la longueur à diviser, on prend, sur une droite passant par O,

n divisions égales : OP = PQ = ... = RM. La parallèle menée par P à AM donne $OX = \frac{a}{n}$ (**243**).

La construction de $x = a\sqrt{n}$ n'est simple que pour les premières valeurs entières de n. Nous nous bornerons à faire remarquer que la *construction de* $x = a\sqrt{2}$ *ou* $x = a\sqrt{3}$ résulte immédiatement de la construction de $\sqrt{3} + \sqrt{2}$, valeur approchée de π (**290**). Si le rayon des cercles tracés est a (*fig.* 186), on a : $DB' = a\sqrt{2}$ [**1**], et $BB' = a\sqrt{3}$ [**2**]. Ici, comme dans tous les cas qui suivent, on considère la longueur x comme connue si l'on a deux points à la distance x, sans qu'il soit utile de les joindre par un trait.

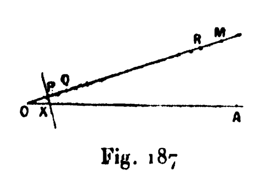


Fig. 187

Soit à *construire une longueur x donnée par* $x = \frac{ac}{b}$. On trace deux droites concourantes, et l'on porte sur l'une d'elles : $OB = b$ et $OC = c$, de part et d'autre de O, puis sur l'autre droite : $OA = a$ (*fig.* 188). La parallèle menée par C à AB donne le point X sur OA tel que OX soit précisément égal à la longueur cherchée x (**243**) [**6**]. Si OC = OA, la même construction donnerait une longueur : $x = \frac{a^2}{b}$ [**5**].

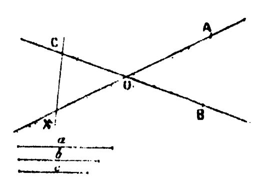


Fig. 188

Pour *construire la moyenne proportionnelle* $x = \sqrt{ab}$ *à deux longueurs données a et b* (**242**), il est avantageux d'employer la méthode suivante qui revient au fond à remplacer les longueurs a et b par $2a$ et $\frac{b}{2}$. On trace (*fig.* 189) le cercle de centre O de rayon $OA = OA' = a$, puis on porte $AB = b$ et l'on construit la perpendiculaire au milieu de AB (**285**), en gardant d'ailleurs pour simplifier l'ouverture de compas $AB = b$. Cette perpendiculaire coupe en X le premier cercle et l'on a $AX = x$, car, dans le triangle rectangle AXA', l'hypoténuse est

égale à $2a$ et la projection de AX sur cette hypoténuse à $\frac{b}{2}$ (**250**). Le problème donne toujours une longueur x et une seule. [5].

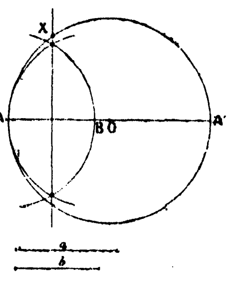


Fig. 189

292. — Si l'on veut *construire la longueur x donnée par une des formules* $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ *ou* $x = \sqrt{a^2 - b^2}$, on est ramené à la construction d'un triangle rectangle (**251**) dont on connaît, dans le premier cas, les côtés de l'angle droit a et b, a étant l'hypoténuse [5], et, dans le second cas, l'hypoténuse a et un côté b, l'autre côté étant x [4]. Cette dernière construction n'est possible que si a est supérieur à b.

Nous traiterons encore le problème qui consiste à *construire deux longueurs x et y connaissant leur somme $x + y = a$ et leur produit $xy = b^2$, ou encore leur différence $x - y = a$ et leur produit $xy = b^2$*, ce qui revient, comme on le verra aisément, à résoudre l'une ou l'autre des équations du second degré (**110**) $z^2 \pm az + b^2 = 0$; $z^2 \pm az - b^2 = 0$, x et y étant les valeurs absolues des racines. Dans le premier cas, où l'on se donne $x + y = a$ et $xy = b^2$, on remarque que $x - y$ est donné par $(x - y)^2 = a^2 - 4b^2$ (**112**), ce qui conduit à la construction suivante d'un triangle rectangle de côté b et d'hypothénuse $\frac{a}{2}$ (*fig.* 190). On prend un segment $AA' = a$ et l'on porte sur la perpendiculaire au milieu O (**285**) de ce segment $OB = b$. puis, de B pour centre avec $OA = \frac{a}{2}$ comme rayon, on décrit un arc de cercle qui coupe AA' en M, tel que $MA = x$ et $MA' = y$, car

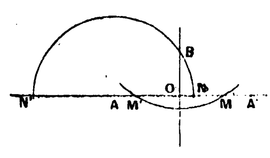


Fig. 190

$x + y = AA' = a$ et $(x - y)^2 = 4.\overline{OM}^2 = a^2 - 4b^2$ (**251**) [6].
Le problème n'est possible que si a est supérieur à $2b$.

Si l'on se donne $x - y = a$ et $xy = b^2$, on remarque que

$(x+y)^2 = a^2 + 4b^2$. On construit les points A, A′ et B comme précédemment. La longueur AA′ étant égale à a et la longueur OB à b, de A pour centre avec AB comme rayon, on trace un cercle qui coupe AA′ en N et N′; les deux solutions sont $ON' = x$ et $ON = y$. En effet $x - y = 2 \,.\, OA = a$ et, de plus, $(x+y)^2 = \overline{NN'}^2 = 4 \,.\, \overline{AB}^2 = a^2 + 4b^2$ [**6**]. Le problème est d'ailleurs toujours possible.

293. Autres constructions. — Les problèmes relatifs aux cercles homothétiques (**246**), aux axes radicaux (**254**), aux pôles et polaires (**256**), etc... donnent naissance à un grand nombre de constructions dont nous ne citerons que les plus importantes.

Etant donnés deux cercles, on sait qu'il y a deux points de la ligne des centres, appelés *centre d'homothétie ou de similitude* (**246**), tels que l'un quelconque d'entre eux étant pris comme centre, chacun des deux cercles se déduise de l'autre par homothétie. On construit aisément l'un quelconque de ces centres en traçant deux rayons parallèles dans les deux cercles donnés et joignant leurs extrémités (**289**); on a ainsi une droite qui passe par un des centres de similitude [**4**]. Cette même construction permet de *tracer une tangente commune à deux cercles*, une telle tangente passant par l'un des centres de similitude (**246**) [**8**].

Soit à *construire le conjugué harmonique d'un point* A *par rapport à un segment donné* PQ (*fig.* 191). On mène par P et Q deux parallèles et l'on porte sur l'une d'elles PM = PN. La droite AM coupe la parallèle passant par Q en un point R, tel que le faisceau des quatre droites RM, RP, RN, RQ soit harmonique (**247**). Donc RN passe au point B cherché [**5**].

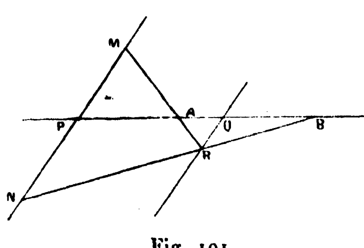


Fig. 191

La *construction de l'axe radical* Δ *de deux circonférences* Γ *et* Γ′ (**254**) est immédiate dans le cas où elles se coupent [**1**]. Dans le cas contraire (*fig.* 192), on a la direction de cet axe en

traçant un cercle concentrique à Γ coupant Γ', et on a un point de cet axe radical en coupant Γ et Γ' par un même cercle auxiliaire dont les axes radicaux δ et δ' avec Γ et Γ' se coupent sur la droite cherchée Δ (**254**) [**5**].

La *construction d'un cercle orthogonal à un cercle donné et ayant un centre donné* (**255**) résulte, comme nous l'avons vu (**287**), de la construction des tangentes à un cercle issues d'un point [**5**].

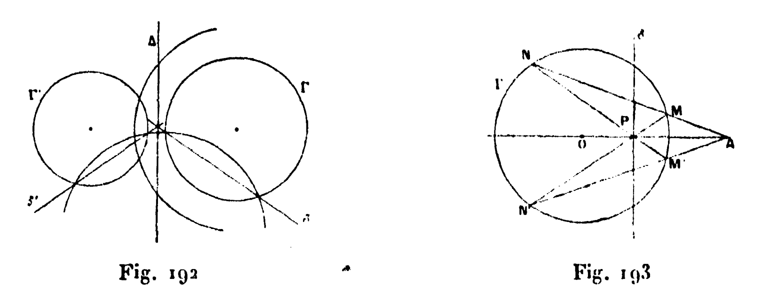


Fig. 192 Fig. 193

Pour *construire la polaire d'un point* A *donné par rapport à un cercle* Γ *donné de centre* O (**256**) (*fig.* 193), on remarque que si AMN et AM'N' sont deux sécantes issues de A, le point de rencontre de MN' et M'N est un point P de la polaire cherchée. Si AMN et AM'N' sont symétriques par rapport à AO, le point P est le pied de cette polaire sur AO, d'où la méthode employée : on trace AMN et l'on joint M au symétrique N' de N par rapport à OA ; par le point P ainsi déterminé on mène une parallèle à NN' [**5**].

294. — Nous terminerons ce qui concerne les constructions de géométrie plane par l'étude de quelques problèmes relatifs aux aires équivalentes (**263**).

On peut toujours *construire un carré équivalent à un polygone donné.* Prenons, par exemple, un pentagone ABCDG (*fig.* 194) et cherchons une longueur k telle que l'aire de ce polygone soit représentée par k^2. Si l'on remplace le sommet G par le point F de rencontre avec CD de la parallèle menée par G à AD, on remplace le pentagone par un quadrilatère ABCF de même

aire, les triangles ADG et ADF de même base ayant la même hauteur (**267**). On ramène de même ce quadrilatère au triangle équivalent ABG′ en menant la parallèle FG′ à BC. Pour construire un carré équivalent à ce triangle qui a pour base BG′ et dont on sait construire la hauteur AH, on cherche une longueur k moyenne proportionnelle entre la demi-base et la hauteur (**291**). La méthode serait la même pour un polygone de n côtés. Si ce polygone de n côtés est un polygone régulier, on cherche la moyenne proportionnelle (**291**) entre le demi-périmètre et l'apothème.

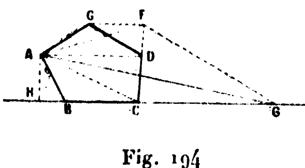


Fig. 194

Si le nombre des côtés de ce polygone régulier croît indéfiniment, on est conduit au problème de la *quadrature du cercle : construire à l'aide de la règle et du compas un carré d'aire équivalente à un cercle donné*. On démontre qu'une telle construction est impossible, et l'on ne peut en donner que des solutions approximatives ; voici l'une des plus simples (*fig.* 195). On trace deux diamètres rectangulaires AOB et COD, et l'on porte

$$OA' = OB' = OC' = OD' = \frac{3}{4}\,OA.$$

Le carré A′B′C′D′ est le carré cherché. Son côté est 1,768 au lieu de 1,772 en prenant OA comme unité ; l'écart est de un quatre-centième environ. On construit d'ailleurs A′B′C′D′ en traçant le cercle de centre A et de rayon OA = AE. La corde commune aux deux cercles de centre O et A passe par le milieu M de AO. Le point A′ est le milieu de ME [**8**].

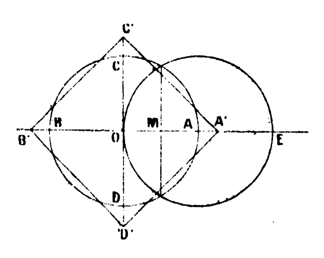


Fig. 195

Exercices. — Nos 254, 255, 263, 279, 328, 403, 404, 405, 406, 407, 408, 409, 410, 411, 412, 413, 414, 415, 416, 417, 418, 419, 420, 421, 422, 423, 424, 425, 426, 449, 450, 452, 462, 463, 464, 465, 466, 467, 468, 469.

CHAPITRE VII

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

295. Représentation des corps. — Il est impossible de représenter sur une feuille de papier des corps quelconques ou de dessiner des constructions faites dans l'espace. Il serait difficile de matérialiser de façon utile celles de ces constructions qui concernent des plans, des dièdres, des trièdres,... Aussi emploie-t-on pour résoudre de tels problèmes des artifices qui constituent une branche auxiliaire de la géométrie, connue sous le nom de *géométrie descriptive*.

Les corps que l'on représente en géométrie descriptive ont souvent des dimensions considérables par rapport aux dimensions du dessin. Il serait impossible et d'ailleurs inutile de représenter un cuirassé, une maison, la surface de la France, le système solaire,... avec leurs dimensions réelles. Quelquefois au contraire les corps sont beaucoup trop petits, comme cela a lieu dans les études microscopiques de métallurgie, de bactériologie,... On suppose toujours que la figure à représenter est remplacée par une figure homothétique dans le rapport k, c'est-à-dire (**245**) par une figure dont les angles ont gardé la même grandeur, dont les longueurs sont multipliées par k, les surfaces par k^2, et les volumes par k^3. Ce nombre k qui varie naturellement suivant l'objet considéré s'appelle l'*échelle du dessin*.

C'est ainsi que la carte de France dite « de l'Etat-Major » est à l'échelle de $\frac{1}{80\,000}$: 1 centimètre de la carte représente 800 mètres du terrain ; une pièce de un sou, de diamètre

25^{mm} (**50**), y couvre une longueur de 2 kilomètres ; 1 hectare de terrain y est représenté par un 64ème de centimètre carré, soit environ 1^{mm^2} et demi, etc...

Nous supposerons pour toutes les *épures* qui suivront que les objets représentés le sont toujours avec leur grandeur réelle.

296. — Les méthodes employées pour représenter les corps sont des plus diverses : levé des plans, croquis de machine, perspective,... Nous ne nous occuperons que de la *géométrie cotée* et de la *géométrie descriptive* proprement dite.

En géométrie cotée, les divers points d'une figure sont représentés, comme nous le verrons un peu plus loin, par leurs projections (**195**) sur un plan horizontal fixe, et leurs « cotes » ou distances à ce plan ; on emploie souvent le calcul dans la recherche des éléments inconnus d'une figure. En géométrie descriptive, les points sont représentés par leurs projections sur deux plans rectangulaires fixes, dont l'un est en général horizontal et l'autre vertical. La recherche des éléments inconnus de la figure se fait toujours par des tracés géométriques et non par des calculs.

La géométrie cotée sert presque exclusivement à la représentation des *surfaces topographiques*, représentation qui serait impossible par la géométrie descriptive. Il est, en effet, facile de se rendre compte de la difficulté qu'il y aurait à figurer un terrain par sa projection sur un plan vertical ou à dessiner à la même échelle les distances horizontales comptées sur une route et les différences de cote des divers points de cette route, les premiers nombres étant de l'ordre de grandeur du kilomètre et les seconds de l'ordre du mètre.

Dans ce qui suit, le lecteur ne trouvera aucune des applications que le topographe, l'ingénieur, l'architecte,... font de ces diverses sciences ; nous nous bornerons uniquement à traiter des problèmes simples concernant la droite, le plan, le cercle et la sphère. Nous ne donnerons d'ailleurs que les notions les plus élémentaires de ces deux sciences, renvoyant le lecteur aux traités spéciaux pour une étude plus complète.

La résolution d'un problème de géométrie dans l'espace comporte deux parties. Dans la première, on cherche une solution théorique ; nous en avons donné de nombreux exemples au début de la géométrie (Chap. I et II). Une telle solution est considérée comme terminée lorsqu'elle se ramène à des intersections de plans ou droites entre eux, ou à des intersections de plans ou droites avec des cercles ou sphères, ce qui conduit d'ailleurs en dernière analyse à des intersections dans un même plan d'une droite avec une droite ou d'une droite avec un cercle. Nous allons examiner maintenant comment on peut achever le problème en effectuant les constructions qu'indique la solution théorique.

297. Géométrie cotée. — En géométrie cotée, *un point* A *de l'espace se représente par sa projection a sur un plan horizontal fixe*, pris comme plan du dessin (*fig.* 196). Pour achever la détermination de ce point, on se donne en outre le nombre 5 qui mesure sa *cote*, c'est-à-dire sa distance à ce plan ; cette cote est positive ou négative, suivant que le point est au-dessus ou au-dessous du plan horizontal (**65**) ; ce nombre 5 n'a de sens que si l'on ajoute au dessin, comme nous l'avons fait, un segment de longueur 1, qui indique quelle est l'unité de longueur choisie (ici, le demi-centimètre). Un point est dit à *cote ronde* lorsque sa cote est un nombre entier.

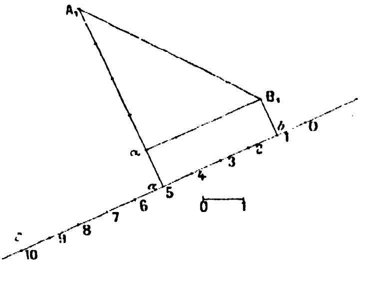


Fig. 196

Une droite Δ est connue si l'on en donne deux points a de cote 5 et b de cote 1. Sa projection horizontale est une droite δ (**195**). Le point de cote 0, s'appelle la *trace horizontale* ; la distance des projections de deux points à cotes rondes consécutives, s'appelle l'*intervalle*. Ici, il est donné par : $\frac{ab}{4} = \frac{3,2}{4} = 0,8$.

Graduer une droite, c'est en marquer les points à cote ronde.

Par analogie avec une définition déjà donnée (**145**), on appelle *pente* d'une droite la tangente de l'angle qu'elle fait avec le plan horizontal. La pente est donc le rapport de la différence de cote de deux points quelconques A, B à la distance horizontale *ab* de leurs projections ; elle est ici : $\frac{4}{3,2} = \frac{1}{0,8} = 1,25$. Comme on le voit, *la pente est l'inverse de l'intervalle.* Il est bon de remarquer que plus la pente est faible, plus l'intervalle est grand, et inversement. Pour une horizontale la pente est nulle ; tous les points ont la même cote. Pour une verticale l'intervalle est nul ; tous les points ont la même projection horizontale.

La distance de deux points donnés A *et* B, représentés en *a* de cote 5 et *b* de cote 1 (*fig.* 196), se calcule par le théorème de Pythagore (**251**). Si l'on fait tourner le plan vertical qui les contient autour de *ab* de façon à le rabattre sur le plan horizontal, A et B viennent en A_1 et B_1 tels que $aA_1 = 5$ et $bB_1 = 1$. La distance cherchée est $A_1B_1 = \sqrt{\overline{A_1\alpha}^2 + \overline{ab}^2} = \sqrt{4^2 + 3,2^2} = \sqrt{26,24} = 5,1$. On peut remarquer que l'angle $A_1B_1\alpha$, dont la tangente est connue, est *l'angle de la droite avec le plan horizontal.*

298. — *Deux droites* Δ *et* Δ' *se coupent si le point m commun à leurs projections horizontales* δ *et* δ' *a la même cote sur chacune d'elles* (*fig.* 197). C'est d'ailleurs ce qui a lieu sur la

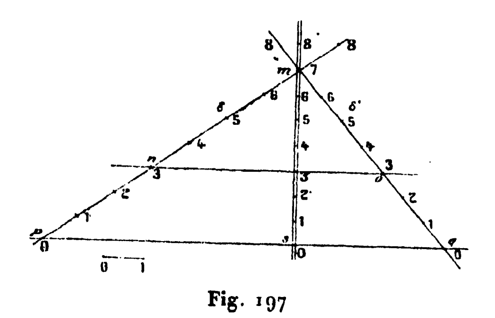


Fig. 197

figure. Dans ce cas, les deux droites forment un plan. Les horizontales de ce plan sont des droites telles que NO ou PQ, qui joignent les points de même cote : elles ont des projections hori-

zontales parallèles : *no*, *pq* (**216**), ... Quant aux perpendiculaires aux horizontales, qui sont les *lignes de plus grande pente* (**217**) du plan, elles sont également perpendiculaires à ces horizontales en projection horizontale. C'est ainsi que *ms* est l'une d'elles. En général, *on représente un plan par une de ses lignes de plus grande pente que l'on appelle échelle de pente*, ligne que l'on trace avec un trait double. La pente d'une telle droite s'appelle la *pente du plan*.

On a souvent intérêt à pouvoir dessiner avec leur grandeur réelle, ou comme l'on dit, *en vraie grandeur* les figures tracées dans un plan donné, car la projection déforme ces figures, en réduisant une longueur d'autant plus qu'elle fait un angle plus grand avec le plan horizontal. Prenons un plan donné par trois points *a*, *b*, *c*, de cotes respectives 2, 0 et 7 (*fig.* 198), et cherchons par exemple les côtés et les angles du triangle ABC des trois points. Si l'on gradue la droite *bc*, on voit que *ad* est la projection d'une horizontale du plan de cote 2, et par suite que la perpendiculaire abaissée de *c* sur *ad* est une échelle de pente de ce plan. Faisons tourner ce plan autour de l'horizontale *ad* jusqu'à ce qu'il devienne horizontal ; *a* et *d* ne changent pas, le point *c* donne un certain point C_1 ; la distance de *c* à *ab* étant 2 et la différence de cote de *c* et de *ab* étant 5, la distance de C à AB, ou de son rabattement C_1 à *ab*, est : $\sqrt{5^2+2^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29} = 5{,}5$. Le triangle *acd* est ainsi devenu aC_1d ; le point *b* vient en B_1 à l'intersection de dC_1 et de la parallèle à cC_1 menée par *b*, et par suite le triangle *abc* est rabattu suivant le triangle aB_1C_1 situé dans le plan horizontal de cote 2, et sur lequel on peut mesurer les côtés et les angles. C'est ainsi que l'on a par exemple : $AB = 4{,}9$; $BC = 8{,}2$ et $CA = 5{,}7$.

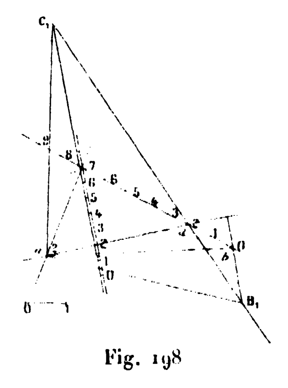


Fig. 198

299. — On vérifie immédiatement que *deux droites parallèles ont des projections parallèles et des intervalles égaux et de même*

CHAPITRE VIII

MÉTHODES EN GÉOMÉTRIE

307. Le raisonnement en Mathématiques. — Les applications des théories générales des mathématiques à la résolution des problèmes d'algèbre, de géométrie, de mécanique, ... sont de natures très différentes. Les unes, et c'est le plus grand nombre, ne demandent aucun effort d'invention. Elles supposent simplement que l'on s'est bien assimilé le langage mathématique et que l'on connait les propriétés classiques concernant la question à étudier. Il suffit d'en faire une application correcte aux données du problème. De ce genre sont l'extraction d'une racine carré, la recherche de la dérivée d'une fonction donnée,.. Le seul écueil à éviter dans cette catégorie de problèmes, c'est une erreur d'interprétation sur les mots employés. Il est indispensable d'avoir toujours présent à la mémoire le sens rigoureux des termes techniques et d'être prêt à chaque instant à « *substituer la définition à la place du défini* ». C'est là une règle des plus importantes qui permet d'éviter bien des erreurs graves. Il ne faut pas se dissimuler cependant que certaines parties des mathématiques, telles que la trigonométrie ou la géométrie descriptive, demandent un long apprentissage. On n'arrive que peu à peu à se familiariser avec les nombreuses formules concernant les lignes trigonométriques ou avec la représentation des figures de l'espace par leurs projections sur deux plans donnés.

D'autres questions sont plus compliquées, et l'on ne voit pas au premier abord quelle est la marche à suivre. Bien que de tels

en un point m de cote 5. On cherche de même un second point n de cote 6 de l'intersection, ce qui suffit à la déterminer.

Si les horizontales des deux plans sont presque parallèles, pour avoir des constructions ne sortant pas des limites de l'épure, on a avantage à couper les deux plans P et P′ par un troisième P″ arbitrairement choisi, que l'on se donne par deux horizontales. Le point commun à son intersection avec P d'une part et P′ d'autre part donne un point de la droite commune à P et P′.

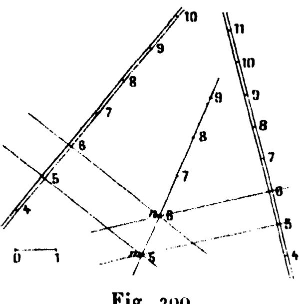


Fig. 200

Si les horizontales des deux plans sont parallèles, leur intersection est une horizontale δ perpendiculaire en projection sur les lignes de plus grande pente Δ et Δ' des deux plans (*fig.* 201). Pour obtenir cette droite, on remarque que les deux échelles de pente sont, en projection, homothétiques par rapport au point o, que l'on détermine en joignant les points de même cote : aa', bb', cc', (**245**) ; on en déduit que δ passe par o, ce qui achève de la déterminer.

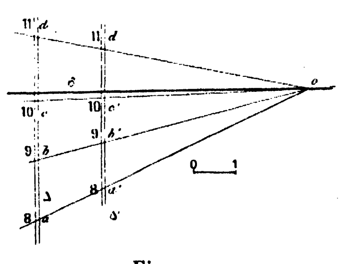


Fig. 201

L'intersection d'une droite D *et d'un plan* P *donné par son échelle de pente* Δ (*fig.* 202) se construit d'après ce qui précède en faisant passer par la droite un plan auxiliaire quelconque déterminé par exemple par les horizontales de cotes 2 et 3. Il coupe le plan P suivant la droite mn. Le point p de cote 1,1 commun à cette droite et à D est le point cherché.

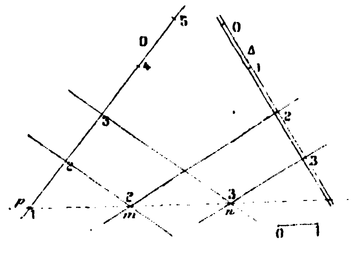


Fig. 202

Cherchons comme application la distance du point a de cote 11,5 à un plan P donné par son échelle de pente Δ (*fig.* 203). La perpendiculaire D au plan donné issue de a, est en projection horizontale parallèle à Δ ; son intervalle est ici $\frac{1}{1,25} = 0,75$.

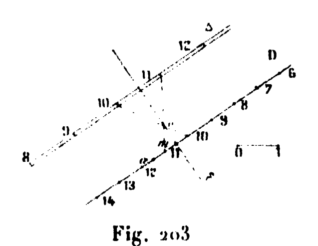


Fig. 203

L'intersection de cette droite D avec le plan s'obtient en prenant comme plan auxiliaire passant par la droite celui qui l'admet pour ligne de plus grande pente, plan dont l'intersection δ avec le plan P se détermine comme nous l'avons vu à l'aide du point o de concours des droites joignant les points de même cote de D et Δ. L'intersection δ ainsi déterminée coupe D en m de cote 10,5 qui est le pied de la perpendiculaire. La distance cherchée est celle des deux points A et M c'est-à-dire ici :
$AM = \sqrt{1^2 + 0,75^2} = \sqrt{1,50} = 1,2.$

301. Géométrie descriptive. — En géométrie descriptive, *un point A de l'espace est représenté par ses projections a et a' sur un plan horizontal et un plan vertical fixes* (**195**). Pour éviter d'avoir deux dessins distincts, on rabat le plan vertical V sur le plan horizontal H, et l'on en déduit aisément que la droite aa', ou *ligne de rappel*, est perpendiculaire sur la *ligne de terre* xy intersection des deux plans de projection (*fig.* 204).

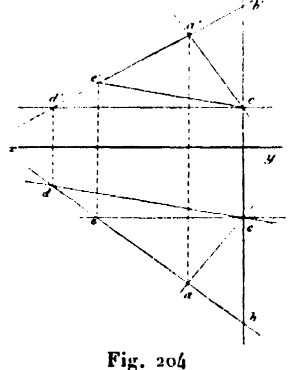


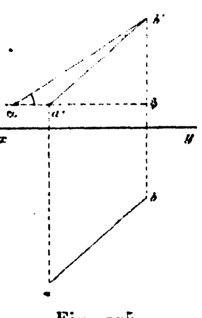
Fig. 204

Une droite D de l'espace a deux projections d et d'. Si l'une de ces projections est perpendiculaire à xy, il doit en être de même pour l'autre et la droite est dite alors *de profil* ; c'est ce qui a lieu pour la droite $b'c'$, bc (*fig.* 204) ; on détermine, comme nous l'avons fait, une telle droite par deux points.

Une parallèle au plan horizontal, ou *horizontale*, a sa projec-

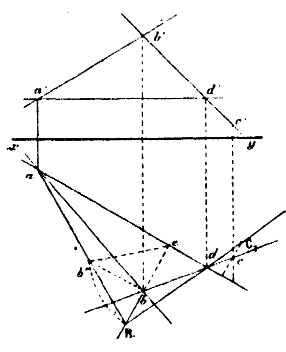
tion verticale parallèle à xy. Une parallèle au plan vertical, ou *frontale*, a sa projection horizontale parallèle à xy. Une perpendiculaire au plan horizontal, ou *verticale*, a pour projection horizontale un point et une *droite de bout*, ou perpendiculaire au plan vertical, a un point comme projection verticale.

Deux droites qui se coupent ont un point commun, c'est ce qui a lieu ici pour les droites $a'b'$, ab et $a'c'$, ac. Elles déterminent un plan. Il est facile de construire des horizontales de ce plan, telles que $c'd'$, cd ou des frontales comme $c'e'$, ce.


Fig. 205

Pour avoir la *distance de deux points* projetés en aa', bb' (*fig.* 205), on remarque, comme nous l'avons déjà dit, que cette distance est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont un côté est ab, l'autre étant la différence de cote $b'\beta$ de b' et de a'. On porte donc $\beta\alpha = ba$ et l'on obtient ainsi en $\alpha b'$ la distance des deux points ; on voit en outre que $b'\alpha\beta$ est l'*angle de la droite avec le plan horizontal.*

Plus généralement, prenons un plan défini par trois points aa', bb', cc', (*fig.* 206) et cherchons à le rabattre autour d'une horizontale, par exemple $a'd'$, ad, de façon à *avoir en vraie grandeur les figures tracées dans le plan.* Si nous nous reportons aux constructions déjà faites dans le même cas en géométrie cotée, nous voyons que la perpendiculaire abaissée de bb' sur l'horizontale $a'd'$, ad est en projection horizontale be perpendiculaire sur ad. On porte sur eb une longueur eB_1 égale à la distance des points E et B de l'espace ; B_1 est le rabattement de b. En pratique, on opère comme il suit : on porte sur la perpendiculaire en b à be un segment bb'' égal à la différence de cote $b\beta$ de A et de B. Le segment eb'' est alors égal à la distance BE et il suffit de prendre $eB_1 = eb''$.


Fig. 206

Cette règle s'appelle parfois *règle du triangle rectangle*, car le triangle $b''eb$ est rectangle en b; il a pour côtés les distances respectives de b et b' à ad et $a'd'$. L'angle en e de ce triangle est l'angle de BE avec le plan horizontal, c'est-à-dire *l'angle du plan avec le plan horizontal* (**217**).

Le rabattement de l'angle ABD ayant lieu en aB_1d, le point C de BD viendra en C_1 au point de rencontre de dB_1 avec la perpendiculaire à ad menée par c, et l'on a en vraie grandeur en aB_1C_1 le triangle ABC.

Si un plan est *de bout*, c'est-à-dire perpendiculaire au plan vertical, tous ses points sont projetés verticalement sur une même droite. Ceci a lieu en particulier pour un plan *horizontal*. Si un plan est *vertical*, ou en particulier *de front*, c'est-à-dire parallèle au plan vertical, on a des résultats analogues.

302. — *Si deux droites sont parallèles, il en est de même de leurs projections horizontales et de leurs projections verticales* (**216**).

Si deux plans sont parallèles, il en est de même de leurs horizontales et de leurs frontales.

Les démonstrations de ces deux propositions sont immédiates. Leurs réciproques sont d'ailleurs exactes.

Si une droite est perpendiculaire à un plan, elle est en particulier perpendiculaire sur les horizontales du plan. Aussi sa projection horizontale est-elle perpendiculaire sur la projection de même nom des horizontales du plan (**216**); on a une propriété analogue pour la projection verticale. *On construit la perpendiculaire à un plan donné passant par un point donné en menant par la projection horizontale du point une perpendiculaire sur la projection correspondante d'une horizontale du plan, et par sa projection verticale, une perpendiculaire sur la projection correspondante d'une frontale du plan.*

Pour obtenir le *point commun à une droite* $\delta\delta'$ *et à un plan défini par deux droites* $m'q'$, mq et $m'n'$, mn (*fig.* 207), on remarque qu'il y a une droite du plan qui est projetée horizontalement suivant δ; c'est la droite définie par les deux points

$q'q$, $n'n$, dont les projections verticales se déduisent de q et de n. Tout point du plan dont la projection horizontale est sur δ a sa projection verticale sur $q'n'$; en particulier le point cherché pp' ayant sa projection verticale à la fois sur $q'n'$ et sur δ' est déterminé par cela même.

La même méthode permet d'obtenir l'*intersection de deux plans* : on fait couper le premier successivement par chacune des droites définissant le second, ce qui donne deux points de l'intersection.

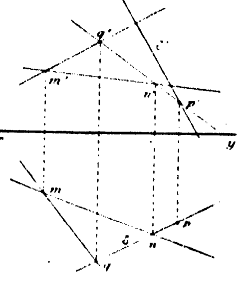


Fig. 207

303. Cercle et sphère. — Un cercle dans l'espace est déterminé par son plan, son centre et son rayon. Les problèmes consistant à trouver l'intersection d'un tel cercle avec un plan ou une droite se ramènent l'un à l'autre, car dans le premier cas on remplacera le plan sécant par son intersection avec le plan du cercle.

Soit donc à chercher l'*intersection d'une droite* Δ *avec un cercle de centre* O, *de rayon* R *et dont le plan est défini par la droite* Δ *et le point* O (*fig.* 208). La solution en géométrie cotée étant analogue à la solution en géométrie descriptive, nous nous bornerons à cette dernière. Pour nous ramener à l'étude de figures en vraies grandeurs, nous allons faire tourner le plan de la droite $\delta\delta'$ et du point oo' autour d'une horizontale $o'h'$, oh de ce plan. Un point quelconque mm' de $\delta\delta'$ venant ainsi en M_1, cette droite vient en Δ_1; on peut alors construire le cercle Γ de centre o et de rayon R donné, cercle qui coupe cette droite en P_1 et Q_1.

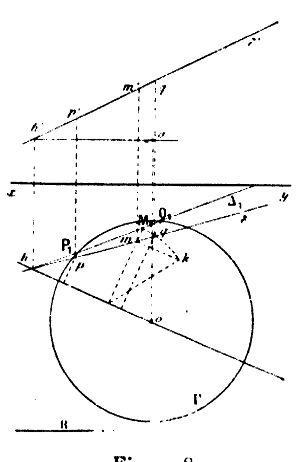
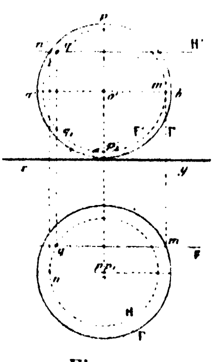


Fig. 208

Ces points sont les rabattements de deux points pp', qq' que l'on obtient facilement et qui sont les points cherchés. Le problème n'est pas d'ailleurs toujours possible.

On voit que ces constructions ne supposent pas que l'on connaisse les courbes projections horizontale ou verticale du cercle de l'espace, courbes que l'on appelle des *ellipses*.

304. — Une *sphère* est déterminée par son centre oo' et son rayon R. En projection horizontale, les points situés sur la sphère se projettent tous à l'intérieur du cercle Γ de centre o et de rayon R, cercle que l'on appelle *contour apparent horizontal* (*fig.* 209). Le lecteur démontrera aisément que tous les points de la sphère projetés horizontalement sur Γ appartiennent au grand cercle de la sphère situé dans le plan horizontal du centre, grand cercle qui est projeté verticalement suivant le segment $a'b'$, C'est ainsi que $m'm$ est un point de la sphère. On définit de même le *contour apparent vertical* Γ', projection du grand cercle de front de la sphère ; $n'n$ est un point de ce contour apparent.


Fig. 209

Les sections planes de la sphère sont des cercles (**228**) dont la projection horizontale n'est un cercle que si le plan sécant est horizontal. Un tel plan de trace verticale H' coupe la sphère suivant un cercle H'H, dont la projection horizontale H a pour centre o. Si H' passe par n', le cercle H passe par n. De même, F'F est un cercle dans un plan de front.

Ceci permet d'*obtenir la projection verticale q' d'un point* O *de la sphère dont on donne la projection horizontale q* : on construit soit un cercle horizontal H'H, soit un cercle de front F'F passant par le point cherché. Il y a, comme on le voit, deux projections verticales q' et q'_1 répondant à la question.

Le *plan tangent* (**230**) en un point qq' de la sphère est le plan perpendiculaire en ce point au rayon $o'q'$, oq.

305. — Par analogie avec ce qui se passe pour la sphère terrestre, on désigne souvent par *équateur* le grand cercle Γ de contour apparent horizontal, par *parallèles* les cercles horizontaux,

par *pôles* les deux points $p'p$ et p'_1p_1 (**228**). Il résulte de ce qui précède que les points de la sphère situés au-dessus et au-dessous du plan équatorial, mais symétriques par rapport à ce plan (**320**), ont deux à deux mêmes projections horizontales. Il faut remarquer en outre que les figures tracées sur la sphère au voisinage d'un pôle, sont projetées horizontalement sensiblement en vraie grandeur, tandis que les figures tracées près de l'équateur sont déformées et réduites. On voit que, par exemple, tous les points de la zone comprise entre $a'b'$ et le plan horizontal H', dont la hauteur est supérieure à la moitié du rayon, sont projetés horizontalement à l'intérieur d'une couronne comprise entre les cercles Γ et H, couronne dont l'épaisseur n'est qu'un cinquième environ du rayon de Γ. Ces remarques servent pour la construction des *cartes géographiques*.

306. — Pour *construire le centre et le rayon du cercle de section plane d'une sphère donnée*, on abaisse du centre de la sphère une perpendiculaire sur le plan sécant, ce qui donne le centre du cercle de section (**228**). Il suffit ensuite de connaître un point de ce cercle pour en déduire son rayon. Ici (*fig*. 210), nous avons pris un plan sécant P défini par une horizontale $a'h'$, ah et une frontale $a'f'$, af. La perpendiculaire abaissée du centre oo' de la sphère a, comme on le sait, sa projection horizontale perpendiculaire à ah et sa projection verticale perpendiculaire à $a'f'$; son intersection avec le plan P donne $\omega'\omega$ comme centre du cercle de section. Pour avoir un point quelconque de ce cercle de section, coupons la sphère et le plan sécant par un plan horizontal quelconque, par exemple par le

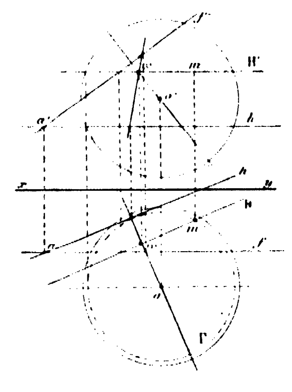


Fig. 210

plan H' qui passe par $\omega'\omega$; il coupe en projection horizontale le plan sécant suivant H et la sphère suivant le cercle Γ ; on en déduit que mm' est un point du cercle et par suite que ωm est

la vraie grandeur du rayon. Il peut d'ailleurs arriver que le cercle de section n'existe pas, si le plan sécant est trop loin du centre de la sphère.

Le problème consistant à *chercher les points communs à une droite et à une sphère* se ramène immédiatement au précédent. Prenons par exemple une sphère de centre oo' (*fig.* 211) et une droite $\delta'\delta$. On fait passer par la droite un plan auxiliaire qui est, en général, le plan vertical δ qui la contient. Le centre $\omega\omega'$ du cercle de section de la sphère par ce plan est au point de rencontre de ce plan avec l'horizontale $o'\omega'$, $o\omega$ de oo'. Quant au rayon, on voit qu'il est égal à ωm, car mm' est un point du cercle de section. Pour trouver les points communs à $\delta\delta'$ et à ce cercle, rabattons le plan vertical δ autour de l'horizontale $\omega'm$, ωm de ce plan. Le cercle rabattu se trace immédiatement; son centre est ω et son rayon ωm. La droite $\delta\delta'$ a en pp' un point qui ne change pas dans le rabattement; on en rabat un autre point quelconque qq', en élevant en q une perpendiculaire à pq sur laquelle on porte $qQ_1 = q'\alpha$. La droite $\delta\delta'$ est ainsi rabattue en Δ_1 qui coupe le cercle rabattu en deux points A_1, B_1 dont le relèvement donne en aa', bb' les points cherchés. Ils n'existent pas d'ailleurs toujours, la distance de la droite au centre de la sphère pouvant être supérieure au rayon de la sphère.

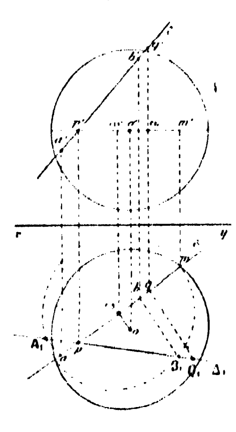


Fig. 211

Exercices. — Nos 269, 280, 316, 323, 324, 329, 330, 427, 428, 429, 430, 431, 432, 433, 434, 435, 436, 437, 438, 439, 440, 441, 442, 443, 444, 445, 446, 447, 448, 450, 452, 462, 464, 465, 466, 467, 469.

CHAPITRE VIII

MÉTHODES EN GÉOMÉTRIE

307. Le raisonnement en Mathématiques. — Les applications des théories générales des mathématiques à la résolution des problèmes d'algèbre, de géométrie, de mécanique, ... sont de natures très différentes. Les unes, et c'est le plus grand nombre, *ne demandent aucun effort d'invention. Elles supposent simplement que l'on s'est bien assimilé le langage mathématique et que l'on connaît* les propriétés classiques concernant la question à étudier. Il suffit d'en faire une application correcte aux données du problème. De ce genre sont l'extraction d'une racine carré, la recherche de la dérivée d'une fonction donnée,.. Le seul écueil à éviter dans cette catégorie de problèmes, c'est une erreur d'interprétation sur les mots employés. Il est indispensable d'avoir toujours présent à la mémoire le sens rigoureux des termes techniques et d'être prêt à chaque instant à « *substituer la définition à la place du défini* ». C'est là une règle des plus importantes qui permet d'éviter bien des erreurs graves. Il ne faut pas se dissimuler cependant que certaines parties des mathématiques, telles que la trigonométrie ou la géométrie descriptive, demandent un long apprentissage. On n'arrive que peu à peu à se familiariser avec les nombreuses formules concernant les lignes trigonométriques ou avec la représentation des figures de l'espace par leurs projections sur deux plans donnés.

D'autres questions sont plus compliquées, et l'on ne voit pas au premier abord quelle est la marche à suivre. Bien que de tels

cas puissent se présenter dans toutes les branches des mathématiques élémentaires, c'est principalement en géométrie qu'on en trouve des exemples; aussi est-ce ici que nous allons indiquer quelques règles utiles. Le lecteur fera sans peine dans ce qui suit la part des raisonnements généraux et de ceux qui concernent plus particulièrement la géométrie.

308. — La solution de tout problème comporte une suite de raisonnements logiques permettant de passer de l'hypothèse à la conclusion. L'énoncé suppose que les données présentent certaines particularités desquelles découlent des propriétés connues qui forment l'*hypothèse*. Les propriétés nouvelles que l'on veut en déduire forment la *conclusion*. Si l'on étudie les raisonnements constituant la solution, on y verra en général que l'hypothèse primitive a été remplacée par une nouvelle hypothèse équivalente à la première, mais plus avantageuse pour la question considérée ; cette seconde hypothèse est souvent remplacée à son tour par une troisième et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on aboutisse à une dernière hypothèse qui soit identique à la conclusion. Ce mode de raisonnement est appelé parfois *raisonnement analytique*. Parfois aussi, on considère l'avant-dernière hypothèse comme étant une nouvelle conclusion que l'on substitue à celle qui est proposée, et ainsi de suite en remontant jusqu'au point de départ ; on fait alors un *raisonnement synthétique*.

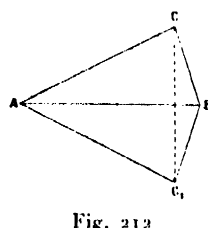


Fig. 212

Reprenons par exemple la démonstration de l'égalité de deux triangles dont les trois côtés sont égaux (**198**) (*fig.* 212). On peut ici dresser immédiatement la liste des diverses hypothèses :

I. Les deux triangles considérés ont trois côtés égaux.

II. Le triangle ABC et le second triangle, placé en ABC_1, donnent : AB commun ; $AC = AC_1$; $BC = BC_1$.

III. ACC_1 et BCC_1 sont isocèles.

IV. La perpendiculaire au milieu de CC_1 passe en A ; la même perpendiculaire passe en B.

V. Le triangle ABC_1 est symétrique de ABC par rapport à AB.

VI. Les deux triangles ABC et ABC_1 sont égaux et l'on a les angles égaux : $ACB = AC_1B$; $CAB = C_1AB$; $CBA = C_1BA$.

VII. Les deux triangles proposés sont égaux et ont tous leurs éléments égaux.

L'énoncé équivaut à l'hypothèse I, et la conclusion à l'hypothèse VII.

Ces remarques, quoique fort simples, sont essentielles, car elles indiquent à quoi l'on reconnaît qu'une solution est rigoureuse, mais elles sont incomplètes, car elles ne montrent pas comment on peut obtenir de telles solutions. Bien qu'il soit difficile ici de préciser, nous allons donner quelques conseils utiles en pratique.

309. Résolution des problèmes de géométrie. — Le premier travail de recherche consiste à *remplacer l'hypothèse donnée par une hypothèse équivalente*. S'il est très facile de trouver de telles substitutions, il est plus délicat de choisir entre elles. Les remarques qui suivent éviteront parfois de longs tâtonnements.

Ne pas perdre de vue la conclusion. L'énoncé et la conclusion contiennent presque toujours des éléments dissemblables ; on essaie d'introduire dans la nouvelle hypothèse une partie des éléments qui doivent se trouver dans la conclusion. Il faut, par contre, être très prudent pour l'introduction d'éléments nouveaux : dans les cas simples, la solution peut s'expliquer sur une figure contenant uniquement les données et les résultats. S'il s'agit d'une propriété du cercle inscrit ou des bissectrices d'un triangle, on n'introduira les hauteurs ou les médianes que si l'on a des raisons très sérieuses de le faire.

Une certaine habitude des problèmes de géométrie guide très souvent les chercheurs ; l'idée de cercle inscrit entraîne celle de bissectrices (**206**, **229**) ; les triangles semblables font songer aux angles égaux (**248**) ; la tangente à un cercle est une perpen-

diculaire au rayon (**229**). Il en est de même pour bien d'autres idées qui en quelque sorte vont deux par deux : triangle rectangle et théorème de Pythagore (**251**) ; points communs à deux cercles et axe radical (**254**) ; etc... Il arrive parfois d'ailleurs que ces associations d'idées, ces suggestions qui s'imposent avec force à l'esprit du mathématicien sont nuisibles et font perdre un temps assez long, mais c'est relativement rare.

Lorsqu'on se trouve arrêté dans ces substitutions d'hypothèses à des hypothèses équivalentes, ou lorsqu'on a peur de trop s'écarter de la question, on part de la conclusion que l'on remplace par une conclusion équivalente, en se laissant guider par l'idée des dernières hypothèses obtenues, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on puisse enfin souder les deux chaînes du raisonnement.

310. — Bien d'autres guides peuvent orienter les recherches. C'est ainsi qu'une figure bien faite suggère des propriétés que l'on peut essayer de vérifier ; un triangle de la figure semble être isocèle, un autre paraît rectangle, trois droites ont l'air d'être concourantes, ... Il n'est pas d'ailleurs indispensable de faire les figures à la règle et au compas, un tracé fait un peu soigneusement à la main sur du papier ordinaire ou quadrillé est largement suffisant.

Dans les questions difficiles, il est souvent commode de tracer un grand nombre de figures qui s'enchaînent en quelque sorte, chacune contenant quelques traits de la précédente avec des traits nouveaux.

Signalons encore l'examen des cas particuliers : lorsqu'on se demande si une propriété qui semble exacte l'est véritablement, on peut reprendre l'énoncé en se plaçant dans un cas très simple où il soit facile de traiter la question. S'il s'agit de triangles, on prendra des triangles équilatéraux ou rectangles ; s'il s'agit d'un quadrilatère, on prendra un carré; s'il s'agit d'une corde d'un cercle, on prendra une tangente ou un diamètre... Si la propriété envisagée est exacte dans ce cas particulier, il n'est pas certain pour cela qu'elle soit vraie dans le cas général ; on a

simplement une présomption de plus en sa faveur. Mais si elle ne se trouve pas vérifiée, c'est qu'elle est fausse et l'on sait qu'il faut orienter ses recherches dans un autre sens. La même remarque s'applique aussi en algèbre où l'on donne aux coefficients des valeurs numériques simples.

Il est certain que l'usage permet seul de résoudre rapidement les problèmes de mathématiques, mais, néanmoins, la facilité avec laquelle quelques personnes traitent ces questions provient en partie de la grande habitude qu'elles ont d'appliquer les règles qui précèdent, de façon d'ailleurs plus ou moins consciente et plus ou moins systématique.

311. — Lorsque cette première partie du travail de recherche est terminée, il est rare, sauf pour des problèmes simples, que la solution obtenue soit à conserver. Il faudrait revoir en détail les raisonnements, pour être certain que les diverses hypothèses considérées sont rigoureusement équivalentes, pour les préciser, pour discuter, s'il y a lieu, dans quel cas on peut les conserver, dans quel cas il faut les modifier. Mais souvent ce n'est pas ainsi que l'on procède. Le travail déjà fait sert uniquement à fournir des matériaux. Les diverses propriétés obtenues sont d'importance visiblement inégale ; certaines sont accessoires et l'on cherche à les faire disparaître par de légères modifications de la marche suivie ; d'autres, au contraire, sont fondamentales dans l'étude de la question considérée ; ce sont elles qui forment le fond même de la démonstration, qui donnent les points d'appui indispensables pour passer de l'hypothèse primitive à la conclusion. Tout l'effort doit alors consister à démontrer le plus rapidement possible ces propriétés pour en déduire de même la conclusion par des raisonnements aussi simples que possible. Il n'est pas rare d'arriver ainsi à une solution complètement différente de la première, et n'ayant en commun avec elle que l'énoncé de deux ou trois propriétés fondamentales qui se trouveraient dans toutes les solutions possibles. Le seul avantage de la première recherche a été simplement de mettre en lumière leur existence.

Ce n'est guère qu'alors qu'on peut faire une discussion rapide, généraliser l'énoncé s'il y a lieu, voir quelles sont les modifications de l'énoncé qui ont une répercussion sur la conclusion, en un mot, ce n'est qu'alors que l'on a vraiment compris la question.

312. Lieux géométriques. — Le plus souvent la résolution d'un problème dépend de la position d'un point que l'on demande de déterminer. C'est ce qui a lieu plus particulièrement dans les problèmes de construction ([1]), où l'on demande de placer soit des points, soit des droites, soit des cercles, ce qui se ramène toujours à placer un ou plusieurs points. On emploie presque toujours dans ce cas la méthode suivante dite *méthode des lieux géométriques*.

Si l'on supprime une des données, le point cherché n'est plus complètement déterminé et doit en général se trouver sur une certaine courbe qui est un *lieu géométrique* de ce point (**206**). On recommence en supprimant une autre donnée à la place de la première, ce qui donne un nouveau lieu. Le point cherché est commun à ces deux lieux. En pratique, on choisit dans l'énoncé les données à supprimer de façon que les lieux obtenus soient aussi simples que possible.

Plus généralement, pour construire une figure quelconque, il peut être avantageux de faire abstraction d'une partie des conditions imposées et de construire une figure partiellement indéterminée, en se fixant arbitrairement certains éléments. Nous nous bornerons à signaler ici cette idée, dont le lecteur trouvera des applications évidentes dans les exercices qui terminent les paragraphes **321** et **322**.

313. — La méthode des lieux géométriques a été appliquée fréquemment dans le chapitre VI. C'est ainsi que, pour cons-

---

(1) Pour l'étude détaillée de pareils problèmes, nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage classique de J. Petersen : *Méthodes et théories pour la résolution des problèmes de constructions géométriques.*

truire un cercle de rayon donné passant par deux points donnés, ou passant par un point donné et tangent à une droite donnée, etc..., nous avons cherché chaque fois deux lieux géométriques du centre de ce cercle (**288**).

Prenons encore le problème suivant : mener par un point P (*fig.* 213) une sécante AB, telle que les deux points A et B où elle coupe deux parallèles données xx et yy soient équidistants d'un point O donné.

Construisons le milieu M de AB. Supprimons d'abord la condition OA = OB. Le lieu du milieu de AB, sécante limitée aux parallèles xx et yy est une parallèle zz à ces deux droites (**224**). Rétablissons maintenant la condition OA = OB, mais supprimons les conditions que A et B soient sur les parallèles données. En remarquant que, dans le triangle isocèle OAB (**197**), l'angle OMP est droit, on voit que le lieu du milieu de AB est le cercle de diamètre PO (**235**). Donc, le point M cherché est commun à ce cercle et à zz. Il y a deux solutions dans le cas de la figure; il n'y en a aucune si le cercle de diamètre OP ne coupe pas zz.

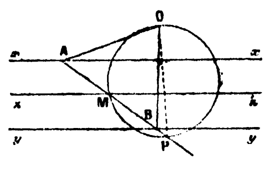


Fig. 213

314. — Voici la liste des principaux lieux géométriques que l'on utilise en géométrie plane. La plupart d'entre eux ont été obtenus dans les divers chapitres qui précèdent. Pour les autres, le lecteur établira sans peine l'exactitude des énoncés qui suivent.

Nous donnerons d'abord les lieux qui sont des droites.

1. *Le lieu géométrique des points situés à une distance donnée d'une droite donnée est formé de deux parallèles à cette droite* (**224**). — *Le lieu géométrique des centres des cercles de rayon donné tangents à une droite donnée est formé de deux parallèles à cette droite.* — *Le lieu géométrique des sommets des triangles de base donnée et d'aire constante est formé de deux parallèles à la base fixe* (**267**).

2. *Le lieu géométrique des points équidistants de deux points*

donnés est une perpendiculaire au milieu du segment qui les joint (**206**). — *Le lieu géométrique des centres des cercles passant par deux points donnés est la perpendiculaire au milieu du segment qui les joint* (**232**).

3. *Le lieu géométrique des points dont la différence des carrés des distances à deux points fixes est constante est une perpendiculaire au segment qui joint ces deux points* (**252**).

4. *Le lieu géométrique des points équidistants de deux droites concourantes est formé des bissectrices de l'angle de ces droites* (**206**). — *Le lieu géométrique des points équidistants de deux droites parallèles est formé d'une parallèle à ces droites* (**224**). — *Le lieu géométrique des centres des cercles tangents à deux droites concourantes ou parallèles est formé des bissectrices de leur angle ou d'une parallèle à ces droites suivant le cas.*

5. *Le lieu géométrique des points dont le rapport des distances à deux droites concourantes est constant est formé de deux droites passant par le point de rencontre des premières.* — *Le lieu géométrique des points dont le rapport des distances à deux parallèles est constant est formé de deux parallèles aux premières.*

6. *Le lieu géométrique des points dont la somme, ou la différence, des distances à deux droites concourantes est constante est formé de segments de droites parallèles aux bissectrices de l'angle des droites.*

7. *Le lieu géométrique des points homothétiques dans le rapport k des points d'une droite est une droite parallèle à la première* (**245**).

8. *Le lieu géométrique du conjugué harmonique d'un point fixe par rapport aux points de rencontre avec un cercle d'une sécante passant par ce point fixe est une droite qui est la polaire du point, ou un segment de cette droite* (**256**).

9. *Le lieu géométrique des milieux des cordes d'un cercle parallèles à une direction donnée est le diamètre perpendiculaire à cette direction* (**226**).

10. *Le lieu géométrique des points ayant même puissance par rapport à deux cercles donnés est une perpendiculaire à la ligne des centres, ou axe radical* (**253**).

Pour les lieux géométriques qui suivent on trouve des cercles :

1. *Le lieu géométrique des points situés à une distance donnée d'un point donné est un cercle ayant ce point pour centre.*

2. *Le lieu géométrique des points ayant une puissance donnée par rapport à un cercle donné est un cercle concentrique au premier. — Le lieu géométrique des points d'où l'on voit un cercle donné sous un angle donné est un cercle concentrique au premier. — Le lieu géométrique des milieux des cordes d'un cercle de longueur donnée est un cercle concentrique au premier* (**227**).

3. *Le lieu géométrique des centres des cercles de rayon donné tangents à un cercle donné est formé de deux cercles concentriques au premier. — Le lieu géométrique des centres des cercles de rayon donné interceptant sur un cercle donné un arc de longueur donnée est formé de deux cercles concentriques au premier.*

4. *Le lieu géométrique des milieux des cordes d'un cercle passant par un point donné est le cercle ayant pour diamètre le segment qui joint ce point au centre, ou un arc de ce cercle.*

5. *Le lieu géométrique des points dont le rapport des distances à deux points fixes est constant est un cercle ayant son centre sur la droite qui joint les deux points* (**244**).

6. *Le lieu géométrique des points dont la somme des carrés des distances à deux points fixes est constante est un cercle ayant pour centre le milieu du segment qui joint les deux points* (**252**).

7. *Le lieu géométrique des points d'où l'on voit un segment donné sous un angle donné est formé de deux arcs de cercle limités aux deux points et symétriques par rapport au segment qui les joint* (**235**).

8. *Le lieu géométrique des points homothétiques des points d'un cercle dans le rapport k est un cercle de rayon k fois plus grand* (**246**).

315. — Les remarques qui précèdent, relatives aux lieux géométriques, concernent plus particulièrement la géométrie plane ; leur extension aux figures de l'espace est immédiate. Il y a cependant une légère différence, comme nous allons le

montrer, en reprenant, sous la nouvelle forme qui suit, un problème déjà traité (**313**).

Soit à mener par un point P (*fig.* 214) une sécante telle que les deux points A et B où elle coupe deux plans parallèles *xx* et *yy* soient équidistants d'un point O donné.

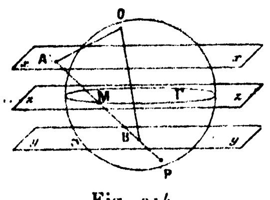


Fig. 214

Les deux lieux du milieu M de AB deviennent ici le plan *zz* parallèle aux deux premiers et équidistants de ces plans (**224**) et la sphère de diamètre OP. Tous les points du cercle Γ d'intersection de cette sphère et du plan *zz* répondent à la question et les droites correspondantes PM sont en nombre infini.

On peut se ramener au cas où le point M est bien déterminé en ajoutant une nouvelle condition à l'énoncé. Supposons par exemple que la sécante AB doive être parallèle à un plan donné; on en déduit que APB est dans un plan connu et par suite que M est à l'intersection de Γ avec ce plan, ce qui donne en général deux positions pour M et deux sécantes correspondantes.

Nous ne donnons pas ici de lieux géométriques de points de l'espace, car il suffit dans la plupart des cas de modifier légèrement les énoncés correspondants pour le plan. Il faut cependant remarquer que, souvent, chaque énoncé pour le plan correspond à deux énoncés pour l'espace, l'un donnant un plan (ou une sphère) et l'autre une droite (ou un cercle). C'est ainsi que le lieu des points du plan équidistants de deux points donnés (**206**) devient :

1° Le lieu géométrique des points de l'espace équidistants de deux points donnés est un plan perpendiculaire au milieu de la droite qui les joint.

2° Le lieu géométrique des points de l'espace équidistants de trois points donnés est une droite perpendiculaire au plan qui contient les trois points.

316. Méthodes de transformation. — Outre la méthode des lieux géométriques dont nous venons de parler et qui est la

plus employée en géométrie élémentaire, nous citerons encore les *méthodes de transformation*.

Considérons une figure (F) formée d'éléments géométriques quelconques : points, droites, cercles,... et faisons correspondre à (F) une nouvelle figure (F′) de telle façon que chacun des éléments de la première corresponde à un élément bien défini de la seconde et réciproquement. Nous nous bornerons d'ailleurs uniquement aux transformations qui font correspondre respectivement à un *point*, une *droite*, un *cercle*, etc... de (F), un *point*, une *droite*, un *cercle*, etc... de (F′). A toute propriété de l'une des figures correspond une propriété de l'autre et si l'on étudie une fois pour toutes une telle correspondance, on pourra, dans chaque cas particulier, dresser la liste des propriétés de (F′) d'après celle des propriétés de (F). De même, pour établir une relation entre les éléments d'un certaine figure (F), il sera parfois avantageux de chercher quelle est la relation correspondante entre les éléments de (F′).

Ce procédé est un des plus féconds que l'on connaisse en géométrie, mais son emploi est surtout fréquent pour des méthodes de transformation qui sortent de notre cadre : *perspective, inversion, polaires réciproques*, etc... Les transformations que nous allons étudier nous serviront surtout à grouper dans une même figure les éléments qu'il est intéressant de rapprocher en laissant certains d'entre eux fixes et en modifiant les autres par l'emploi d'une de ces transformations. Le lecteur s'en rendra compte par la considération attentive des applications qui suivent l'étude de chacune de ces méthodes de transformation.

317. Translation et rotation. — La *translation* remplace, comme nous le savons (**213**), tous les points A, B, C... d'une figure par de nouveaux points A′, B′, C′,... tels que les segments AA′, BB′, CC′... soient parallèles, égaux et de même sens. Il en résulte que toute droite AB est remplacée par une parallèle A′B′, tout plan ABC par un plan parallèle A′B′C′, tout angle BAC par un angle égal B′A′C′ ; il en est de même pour tout angle dièdre ou polyèdre. Un cercle ou une sphère donnent un

cercle ou une sphère de même rayon. Plus généralement, une figure quelconque subit un simple déplacement dans l'espace et reste superposable à elle-même. Cette méthode nous a servi à plusieurs reprises, par exemple pour établir que deux sections d'une surface prismatique par des plans parallèles sont égales (**222**).

La translation appliquée à une partie seulement d'une figure donnée permet de juxtaposer certains éléments de façon simple. Démontrons, par exemple, que si un trapèze ABCD (*fig.* 215) a deux côtés AB et CD rectangulaires, la demi-différence des bases AD et BC est égale à la distance MN des milieux de ces bases. Déplaçons par translation AB d'une part jusqu'en EC et MN d'autre part jusqu'en PC. On voit d'après l'hypothèse que le triangle ECD est rectangle en C, et admet comme médiane PC = MN. On en déduit (**221**) : 2 . CP = ED ou encore : 2 . MN = AD — BC.

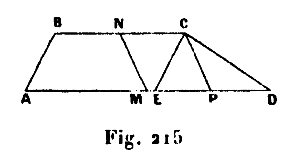


Fig. 215

De même, dans un quadrilatère quelconque ABCD (*fig.* 216), on peut amener par translation deux côtés consécutifs AD et DC en EB et BF. On voit aisément que la figure AEFC est un parallélogramme dont les côtés sont deux à deux parallèles et égaux aux diagonales du quadrilatère ; les quatre droites joignant B aux sommets du parallélogramme sont parallèles et égales aux côtés du quadrilatère, l'aire du parallélogramme est le double de celle du quadrilatère (**268**), etc.

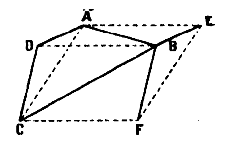


Fig. 216

318. — La translation n'altère pas, comme nous l'avons vu, la grandeur des divers éléments d'une figure ; il en est de même de la *rotation autour d'un axe* Oz (**196**). Un point A décrit un arc de cercle d'axe Oz et vient ainsi en A'. L'angle dont a tourné A a la même grandeur α et le même sens pour tous les points de l'espace. Un segment AB devient un segment égal A'B' ; un angle BAC donne un angle égal B'A'C'.....

On se borne parfois à considérer des points dans un même plan perpendiculaire à l'axe en un point O, que l'on appelle alors *centre de rotation* (**196**). Il est alors intéressant de remarquer que, si après une rotation d'angle α une droite Δ du plan vient en Δ', l'angle de ces deux droites est précisément α, comme on le verra en considérant les parallèles passant par O. De plus, pendant la rotation, Δ est à une distance constante de l'origine et par suite reste tangente à un cercle de centre O.

Nous nous sommes déjà servis de la notion de rotation pour l'étude de diverses propriétés du cercle et de la sphère (**227, 228**). Donnons encore une application simple.

Construisons sur les côtés AB et AC d'un triangle ABC deux triangles équilatéraux ABB', ACC' (*fig.* 217). Le triangle AB'C venant en ABC' après une rotation de 60° autour de A, on en conclut que B'C = BC' et que les deux droites B'C et BC' se coupent en M sous l'angle de 60°. On pourrait en déduire diverses autres propriétés. C'est ainsi que M est à la fois sur les cercles circonscrits aux triangles AB'B et AC'C (**235**), que de ce point M on voit AB, AC, BC sous le même angle, etc.

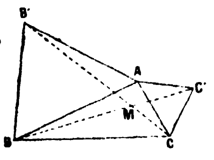


Fig. 217

319. Symétries. — Un cas très important de la rotation est, comme nous l'avons vu, la *symétrie par rapport à un axe* (**196**), l'angle α de la rotation autour de cet axe étant ici égal à deux angles droits. L'axe de symétrie est perpendiculaire aux milieux de tous les segments joignant deux points symétriques. Si la figure (F) est contenue dans un plan P passant par l'axe, la figure symétrique (F') est aussi dans ce plan. Aussi considère-t-on parfois une telle symétrie en géométrie plane ; on lui donne le nom de *retournement.*

Le cas particulier du centre de rotation permet de définir la *symétrie par rapport à un point*, dans le cas des figures planes (**196**), ou même par extension dans le cas de points quelconques de l'espace. Deux points M et M' sont dits symétriques par rapport à un centre O lorsque leur milieu est ce point O. Une

telle symétrie est complètement distincte de la symétrie par rapport à un axe, bien qu'elles aient en commun un cas particulier.

La symétrie par rapport à un centre nous a servi en particulier dans la construction des trièdres symétriques (**201**). Cet exemple nous montre, sans qu'il soit utile d'insister davantage, une différence fondamentale entre cette transformation et celles qui précèdent : les éléments des deux figures gardent la même grandeur, mais les figures ne sont pas superposables, à moins cependant qu'il ne s'agisse de figures situées dans un plan contenant le centre de symétrie, car alors on peut se ramener à une rotation. Remarquons qu'une telle symétrie remplace toujours une droite par une parallèle.

Si, par exemple, nous considérons les lettres de l'alphabet, nous voyons que les majuscules présentent presque toutes, au moins approximativement, une certaine symétrie et peuvent à ce point de vue se ranger en cinq catégories :

Un centre et deux axes de symétries :				H	I	O	X
Un axe horizontal :			B	C	D	E	K
Un axe vertical :	A	M	T	U	V	W	Y
Un centre de symétrie :					N	S	Z
Pas de symétrie :	F	G	J	L	P	Q	R

320. — Enfin, on peut définir la *symétrie par rapport à un plan* (*fig.* 218). Deux points A et A′ sont dits symétriques par rapport à un plan P, si ce plan est perpendiculaire au milieu du segment qui les joint. Il est inutile d'étudier en détail les propriétés de cette symétrie, car elle se ramène aux deux précédentes. Prenons, en effet, dans le plan P un point O arbitraire et la perpendiculaire Oz à P en ce point. Dans le plan de AA′ et de Oz, on verra aisément que le symétrique A_1 de A par rapport à Oz admet lui-même comme symétrique par rapport à O le point A′. Si l'on se donne

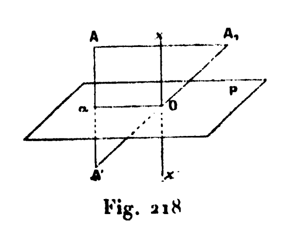


Fig. 218

une figure (F) quelconque, on pourra donc étudier la figure (F_1) symétrique par rapport à l'axe Oz, puis la figure (F') symétrique de (F_1) par rapport à O. Il en résulte en particulier que deux figures (F) et (F') symétriques par rapport à un plan, tout comme deux figures symétriques par rapport à un point, ne sont pas superposables en général.

Un objet et son image dans un miroir plan sont symétriques par rapport au plan de ce miroir. Le corps de l'homme ou des animaux a très sensiblement un plan de symétrie ; c'est pour cela que les deux mains de l'homme ne sont pas identiques, quoiqu'elles aient les mêmes dimensions ; par exemple, le gant de la main droite ne peut pas servir pour la main gauche.

321. — Voici quelques applications des diverses symétries.

Etant donnés une droite Δ et un segment AB (*fig.* 219), cherchons un point M de Δ tel que la différence des angles BMD et AMD soit égale à un angle α donné à l'avance.

Fig. 219

Prenons le symétrique C de B par rapport à Δ. D'après l'hypothèse, on a :

$$\alpha = \text{BMD} - \text{AMD} = \text{CMD} - \text{AMD} = \text{CMA}.$$

Le point M sera donc donné par l'intersection de Δ avec l'un des arcs de cercle lieux des points d'où l'on voit AC sous l'angle α (**235**). Nous ne ferons pas la discussion. Le même raisonnement permettra en particulier de construire un triangle ABM connaissant la base AB et la bissectrice Δ de l'angle en M.

Soit encore à construire un trapèze rectangle ABDC (*fig.* 220) connaissant les longueurs des deux côtés non parallèles AB et CD et sachant de plus que CD est vu du milieu O de AB sous un angle droit. Parmi les diverses méthodes qui peuvent être employées, en voici une basée sur la symétrie.

Plaçons d'abord AB de façon arbitraire ; les sommets inconnus C et D sont sur les perpendiculaires xx et yy à AB en A et B. Le symétrique E de C par rapport à O est sur yy et de plus le triangle CED est isocèle ; on est ramené à trouver un

segment ED de yy ayant une longueur connue : ED = CD et vu de O sous un angle droit. On achève la construction à l'aide d'une translation : prenons une demi-circonférence dont le diamètre C'D', égal à ED et par suite à CD, est pris arbitrairement sur yy. La parallèle zz menée par O à xx le coupe en O' et O'_1

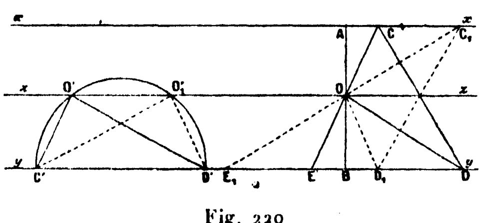


Fig. 220

Le triangle rectangle C'O'D' (**235**) ramené en EOD par une translation parallèle à xx nous donne en ABDC le trapèze cherché. Le second point O'_1 donne de même le triangle $O'_1C'D'$ et par suite le trapèze ABD_1C_1, d'ailleurs symétrique de ABCD par rapport à zz. Le problème n'est possible que si AB est inférieur à CD.

322. Homothétie et similitude. — Les transformations qui précèdent respectent les grandeurs des éléments : distances et angles. Il n'en est pas de même de l'*homothétie* (**245**), ou de la *similitude* (**248**), qui conservent seulement les valeurs des angles, ce que l'on traduit parfois de façon d'ailleurs peu précise en disant que *deux figures homothétiques semblables ont la même forme, mais non la même grandeur*.

Signalons le théorème suivant qui permet de déduire du lieu géométrique (C) d'un point A une courbe semblable (C') lieu géométrique d'un point A'.

Si un triangle OAA' *constamment semblable à un triangle fixe a un sommet fixe* O, *le lieu géométrique* (C') *du sommet* A' *est semblable au lieu* (C) *du sommet* A. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que les deux courbes (C) et (C') se déduisent l'une de l'autre par une rotation de centre O, suivie d'une homothétie de même centre.

Les applications de l'homothétie ou de la similitude à la résolution des problèmes sont très nombreuses ; nous nous bornerons à citer deux exemples classiques.

Prenons deux cercles C et C′ se coupant en A et B (*fig.* 221). A chaque sécante PP′ passant par B correspond un triangle APP′ qui varie avec la sécante considérée. Le lieu du centre de gravité G d'un tel triangle est un cercle passant par A. Soit en effet M le milieu de PP′. Le triangle APP′ reste semblable à lui-même, quelle que soit la position de la sécante PBP′, puisque les angles en P et P′ ne changent pas de valeur (**235**). Le triangle APP′ étant constamment semblable à lui-même, il en est de même du triangle AMP formé par la médiane AM. On en déduit que l'angle AMB a une grandeur constante et par suite que M décrit un arc de cercle passant par A et B. On verra de façon plus précise que tout le cercle AMB fait partie du lieu. Le lieu de G est homothétique par rapport à A du lieu de M dans le rapport $\frac{2}{3}$ (**224**) ; c'est donc une circonférence passant par A. On établit de façon analogue que l'orthocentre, le centre du cercle circonscrit, etc... de ce triangle décrivent des cercles passant par A.

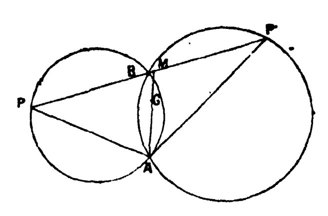


Fig. 221

Comme seconde application, proposons-nous de construire un carré inscrit dans un triangle donné ABC (*fig.* 222) et ayant un de ses côtés sur BC. Négligeons pour le moment une des conditions auxquelles est assujetti ce carré, et construisons un carré tel que *pqmn* inscrit simplement dans l'angle ABC, ce qui se fait en partant d'une perpendiculaire quelconque *qm* à BC. Tous les carrés inscrits dans le même angle sont homothétiques les uns des autres par rapport à B ; le lieu géomé-

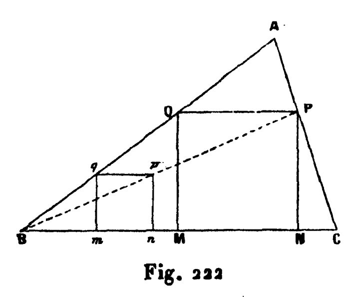


Fig. 222

trique de leur sommet p est la droite Bp qui coupe AC en P. Le carré homothétique de $pqmn$ par rapport à B dans le rapport $\frac{BP}{Bp}$ répond à la question.

On construirait par des procédés analogues une demi-circonférence inscrite dans un triangle, un carré circonscrit à un triangle équilatéral et ayant avec lui un sommet commun, etc.....

Exercices. — Nos **294, 411, 417, 449, 450, 451, 452, 453, 454, 455, 456, 457, 458, 459, 460, 461, 462, 463, 464, 465, 466, 467, 468, 469, 470.**

CINÉMATIQUE

---

323. Temps. — En géométrie, la notion du temps n'intervient pas dans les raisonnements. Cependant, lorsqu'on envisage des positions différentes d'un même corps, il est parfois commode de leur associer l'idée de *mouvement* qui permet de passer de l'une de ces positions à l'autre. Les notions de *translation* (**317**), de *rotation* (**318**), de *lieux géométriques* (**312**) nous font songer à un corps qui glisse, qui tourne, ou qui se déplace dans l'espace. C'est à cause de cela que la *cinématique* appelée aussi *géométrie du mouvement* est parfois considérée comme un chapitre de la géométrie.

Considérons un *point matériel* en mouvement, bien qu'en réalité un tel point, au sens rigoureux du mot, n'existe pas dans la nature. Dans le déplacement de ce point, ou, si l'on veut, de ce *mobile*, il faut distinguer l'étude de la *trajectoire*, ou courbe que décrit le point, de l'étude des époques auxquelles le mobile occupe les divers points de cette trajectoire. En géométrie, on s'occupe de la première partie de cette étude ; en cinématique, on se borne à la seconde. Nous ne nous occuperons pas d'ailleurs de savoir quelles sont les causes qui peuvent produire ou modifier un tel mouvement.

324. — La notion de *temps*, qui est à la base de la cinématique, est comme celles de longueur, d'aire,... une de ces notions fondamentales qu'il est difficile de définir. Notons cepen-

dant qu'on ne peut pas conserver ou transporter un étalon de temps, comme un étalon de longueur, mais on a remarqué qu'un grand nombre de phénomènes se reproduisent avec des durées qui au premier abord nous semblent égales : oscillations d'un *pendule*, ou corps pesant placé au bout d'un fil ; chute d'un corps lâché à une hauteur constante ; rotation de la Terre sur elle-même ; vibration des lames élastiques fixées par une extrémité ; écoulement du sable dans un sablier, etc.... etc... Comparons deux de ces phénomènes en comptant par exemple le nombre des oscillations qu'a un pendule pendant qu'un sablier se vide. On constate que ce nombre d'oscillations est toujours le même pour le même pendule et le même sablier. Cette remarque que l'on peut faire pour un très grand nombre de phénomènes a conduit à considérer l'un quelconque d'entre eux comme ayant une durée constante, quelle que soit l'époque à laquelle on la reproduise. C'est ainsi qu'en se basant sur la rotation de la Terre on a défini l'unité adoptée dans le système C. G. S. (**51**), ou seconde [1]. En donnant au fil d'un pendule une longueur convenable, 99 centimètres à Paris (**333**), on obtient une seconde comme durée de chaque oscillation. On adjoint à un tel pendule un compteur d'oscillations, et l'on a ainsi une horloge, qui permet ensuite de mesurer de façon commode la durée d'un phénomène en comptant le nombre de secondes écoulées depuis son début.

Le temps peut d'ailleurs être compté positivement ou négativement (**65**), suivant qu'il s'agit d'époques postérieures ou antérieures à l'*origine des temps*, ou comme l'on dit au *temps zéro*. Quant à cette origine, on la prend en général au moment où commence le phénomène à étudier, mais lorsqu'il s'agit de périodes de longues durées, comme en astronomie ou en histoire, on prend une époque fixe qui sert d'origine à l'*ère* considérée. Cette ère est la même pour la plupart des pays civilisés qui ont par suite le même *calendrier*.

---

(1) Le jour solaire moyen est défini de façon rigoureuse en astronomie ; il se subdivise en 24 heures, chaque heure en 60 minutes et chaque minute en 60 secondes, appelées : *secondes sexagésimales de temps moyen.*

325. Mouvement. — Lorsque les distances d'un corps aux objets environnants varient, on dit qu'il est en *mouvement*; sinon il est au *repos* par rapport à eux. Il faut bien se rendre compte de ce fait que *la notion de mouvement est essentiellement relative* et dépend des corps auxquels on compare le mobile. C'est ainsi qu'à l'intérieur d'un wagon en marche une mouche est considérée par les voyageurs comme au repos ou en mouvement suivant qu'elle est posée ou qu'elle vole, mais, dans les deux cas, elle est en mouvement par rapport aux rails sur lesquels roule le wagon.

Prenons encore un passager qui se promène sur le pont d'un bateau en marche. Son mouvement par rapport au bateau n'est pas le même que par rapport à l'eau qui l'environne, à cause du roulis, du tangage et du mouvement propre du bateau. L'eau elle-même n'est pas fixe par rapport au sol, à cause des courants maritimes, de la marée,... Quant au sol, on sait que la Terre tourne sur elle-même et se déplace autour du soleil, que le soleil se dirige vers la constellation d'Hercule, etc... Il pourrait d'ailleurs arriver que, pendant un certain temps, le passager marchant sur le pont du bateau fût immobile par rapport à l'eau ou par rapport au sol. Quoi qu'il en soit, il résulte de ce qui précède qu'il est impossible de comparer un corps mobile à des corps au *repos absolu*, car une telle expression n'a pas de sens. Aussi se borne-t-on, comme nous l'avons déjà dit, à considérer des mouvements ou un repos relatifs.

326. Mouvement rectiligne uniforme. — Le plus simple de tous les mouvements est le mouvement uniforme, dans lequel le mobile parcourt sur sa trajectoire *des segments de longueurs*

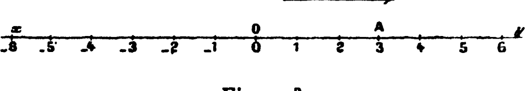


Fig. 223

égales dans des temps égaux. Si cette trajectoire est une droite xy (*fig.* 223), le mouvement est dit *uniforme et rectiligne*. Suppo-

sons que le mobile aille dans le sens de la flèche sur xy et mette t secondes pour parcourir un *espace* de longueur e. Il est visible que les espaces parcourus sont proportionnels aux temps employés à les parcourir (**42**), ce que l'on peut écrire :

$$\frac{e}{t} = \frac{e'}{t'} \dots = \text{constante.}$$

Cette constante v s'appelle la vitesse du mobile. Le nombre qui la mesure est en particulier égal à celui qui mesure l'espace parcouru dans l'unité de temps. Il faut bien remarquer qu'une vitesse n'est pas un espace, mais le rapport d'un espace à un temps. Dans le système C. G. S., l'unité de vitesse est la vitesse d'un mobile parcourant d'un mouvement uniforme 1 centimètre en 1 seconde. On l'appelle parfois « le centimètre par seconde ».

Nous avons déjà dit (**71**) que la formule $\frac{e}{t} = v$ est applicable quels que soient les signes de e, v et t. On a ainsi pour l'*équation du mouvement* :

$$e = vt.$$

Un grand nombre des mouvements que l'on peut observer dans la nature sont uniformes, ou, tout au moins, composés de phases pendant lesquelles la vitesse reste sensiblement constante : train en marche, cycliste ou voiture sur une route, bateau sur un canal, propagation du son dans l'air, etc... Remarquons que dans ce dernier cas comme dans quelques autres analogues, il n'y a pas à proprement parler de déplacement d'un point matériel, mais transmission d'un certain état vibratoire. L'extension à ce cas des notions qui précèdent ne présente d'ailleurs aucune difficulté.

327. — Il est commode pour étudier un mouvement d'en tracer le *diagramme*, tout comme pour étudier une fonction nous en avons construit le *graphique* (**140** et suivants). Si l'on porte en abscisses sur un axe Ωt (*fig.* 224) appelé *axe des temps* les diverses valeurs du temps, et en ordonnées sur l'*axe des*

espaces Ωe les valeurs correspondantes des espaces, le mouvement étudié donne un certain tracé qui est par définition le diagramme du mouvement. C'est ainsi que la position A (*fig.* 223) correspond au point A_1 du diagramme obtenu en portant $\Omega\alpha = t$ et $\Omega a = OA = e$.

Dans le cas particulier du mouvement rectiligne uniforme, la loi du mouvement : $e = vt$ est du premier degré en e et t et le diagramme du mouvement est une droite Δ passant par Ω, telle que, au bout d'une seconde : $\Omega U = 1$, l'espace parcouru

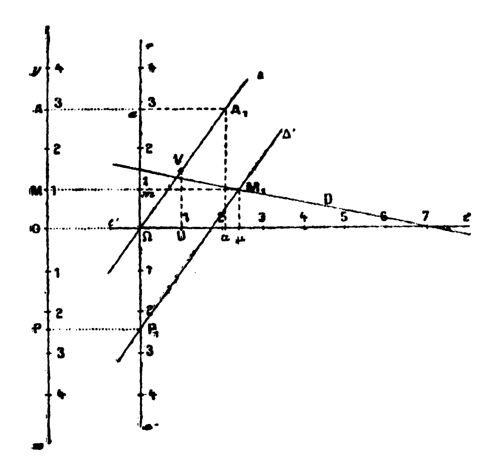


Fig. 224

soit $\overline{UV} = v$. *La vitesse du mobile est exprimée par le même nombre que le coefficient angulaire de la droite* Δ. Plus le mobile va vite, plus l'angle de Δ avec Ωt est grand et inversement plus le mobile va lentement, plus cet angle est petit.

La trajectoire xy suivant laquelle a lieu le mouvement étant ici une droite, nous pouvons la placer parallèlement à Ωe de façon que l'origine soit sur Ωt (*fig.* 224). Le point A est alors la projection de A_1 sur xy, puisque $OA = \alpha A_1$ et l'on peut dire que *le mouvement du mobile sur sa trajectoire rectiligne* xy, *est la projection du mouvement du point représentatif sur son diagramme.*

Si l'on avait supposé que le mobile ne soit pas à l'origine des

espaces, au temps zéro, on aurait obtenu pour l'équation du mouvement :

$$e = vt + e_0$$

e_0 étant l'abscisse de la position initiale. Le diagramme correspondant serait la parallèle Δ' à Δ passant par le point P_1, tel que $\Omega P_1 = \overline{OP} = e_0$. Si, au lieu d'un seul mobile, on étudiait plusieurs points en mouvement sur le même axe, il suffirait chaque fois de tracer sur le même diagramme les droites qui correspondent à ces mouvements. C'est ainsi que les droites D et Δ' sont ici les diagrammes des deux mouvements représentés par les équations :

$$e = -0{,}22\, t + 1{,}4$$
$$e = 1{,}5\, t - 2{,}6$$

et l'on voit sur le diagramme que la rencontre des deux mobiles a lieu au temps $\Omega\mu = 2{,}4$, et au point M tel que $\overline{OM} = \mu M_1 = 1$.

C'est par cette méthode que l'on construit les *graphiques de chemins de fer*, permettant d'étudier les mouvements des trains, leurs croisements, les heures des passages aux diverses gares, la distance de deux trains allant dans le même sens, etc...

328. Mouvement circulaire uniforme. — Un autre cas particulier important du mouvement uniforme est celui où la trajectoire est un cercle (*fig.* 225). Supposons qu'au temps zéro le mobile soit en O, et qu'il tourne sur le cercle dans le sens de la flèche, avec une vitesse v, c'est-à-dire qu'il parcourt un arc de longueur v dans l'unité de temps. Au bout d'un temps t, positif ou négatif, il aura parcouru un arc $e = vt$. Si par exemple $v = 0{,}5$, le rayon étant égal à 1, et que $t = 52$ secondes, on a $e = 26$ radians $= 1655^{\gamma}$: le mobile fait 4 tours complets et parcourt l'arc $OA = 55^{\gamma}$ environ.

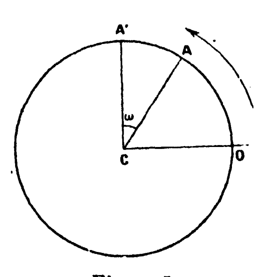


Fig. 225

Un tel mouvement s'appelle parfois *mouvement de rotation*

uniforme (**196**, **318**). Son diagramme est une droite, comme dans le cas du mouvement rectiligne uniforme. On voit qu'il faut bien se garder de confondre les mots « trajectoire » et « diagramme ». Il est d'ailleurs ici impossible d'étudier directement les positions du mobile sur sa trajectoire en projetant les positions correspondantes du point qui décrit le diagramme.

Des arcs égaux étant parcourus en des temps égaux, les angles au centre balayés par le rayon CA sont égaux. On appelle *vitesse angulaire* ω du mobile A l'angle dont tourne le rayon CA dans l'unité de temps, ou, de façon plus précise, le rapport constant de l'angle dont tourne ce rayon au temps employé pour cette rotation. Les angles sont évalués en radians (**262**). Si le rayon du cercle est R, on a dans l'unité de temps : $v = \text{arc}\,AA'$, $\omega = \text{angle}\,ACA'$, donc :

$$v = \omega R.$$

On voit que tous les points du rayon CA décrivent des cercles quand ce rayon tourne et que les vitesses angulaires sont les mêmes pour tous ces mouvements ; quant aux *vitesses linéaires*, elles sont d'autant plus grandes d'après la formule $v = \omega R$ que les points sont plus loin du centre.

Le mobile parcourant l'arc ω radians en 1 seconde, parcourt l'angle de 1 radian en un temps $\frac{1}{\omega}$ et par suite il fait un tour complet en un temps $\theta = \frac{2\pi}{\omega}$. Ce temps θ s'appelle la *période* du mouvement. Inversement, si le mobile met un temps θ pour revenir à son point de départ, sa vitesse angulaire est $\omega = \frac{2\pi}{\theta}$. C'est ainsi que la Terre qui fait un tour en 24 heures a une vitesse angulaire $\omega = \frac{2\pi}{24.60.60} = 7{,}3 \cdot 10^{-5}$ C. G. S. (**51**).

Lorsqu'il s'agit d'un mobile qui a une grande vitesse angulaire, on appelle *fréquence* le nombre de tours $n = \frac{1}{\theta} = \frac{\omega}{2\pi}$ qu'il effectue en une seconde ; c'est ainsi qu'un gyroscope faisant 1500 tours par minute a une fréquence de $\frac{1500}{60} = 25$.

Les exemples de mouvement circulaire uniforme se rencontrent assez fréquemment en pratique : roues de moulin, volants de machines à vapeur, rouages d'une montre, roues d'une locomotive considérées par rapport à la locomotive elle-même, etc...

329. Mouvement rectiligne varié. — Supposons maintenant qu'un mobile décrive une droite xy (*fig.* 226) d'un mou-

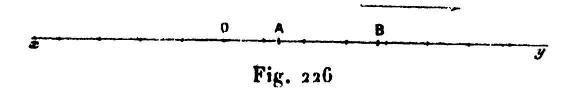


Fig. 226

vement quelconque. Nous allons préciser pour un tel mouvement la notion vulgaire de vitesse.

Si dans un temps T le mobile va de A en B, parcourant ainsi un certain espace E, il est commode d'imaginer un mobile fictif qui partant de A en même temps que le mobile réel arriverait en B en même temps que lui, mais qui marcherait d'un mouvement uniforme; la vitesse $V = \frac{E}{T}$ de ce mobile fictif s'appelle la *vitesse moyenne* du mobile réel de A à B. C'est ainsi qu'un train partant de Marseille à 6 heures du matin et arrivant à Lyon à midi, a une vitesse moyenne de $\frac{350}{6} = 58$ kilomètres $\frac{1}{3}$ à l'heure ou encore $\frac{350.000.00}{6.60.60} = 1620$ C. G. S. environ. Mais ce premier renseignement est assez vague et ne nous donne pas la vitesse du train à son passage à un endroit donné du parcours.

On appelle *vitesse du mobile* au point A la limite de la vitesse moyenne qu'il a dans l'intervalle AB, quand cet intervalle devient de plus en plus petit, B tendant vers A.

Nous allons ramener cette importante notion de vitesse à celle de dérivée qui lui est au fond complètement identique (**152** et suivants).

L'origine des espaces sur xy étant un point O arbitraire, le mouvement sera connu si, à chaque instant t, on connaît l'abscisse $e = \overline{OA}$ qui définit la position du mobile, c'est-à-dire si

l'on connaît la fonction $e = f(t)$ (**139**). C'est ainsi que le mouvement uniforme est défini par $e = vt + e_0$ (**327**). Au bout du temps $t + h$, l'abscisse est devenue $e + k$, le mobile ayant parcouru l'espace k dans le temps h avec une vitesse moyenne $\frac{k}{h} = \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$. Quand l'intervalle de temps h tend vers o, la limite de ce rapport est par définition la dérivée $f'(t)$ de la fonction $e = f(t)$ par rapport au temps. C'est d'autre part la vitesse au point d'abscisse e, on a donc :

$$v = f'(t).$$

La vitesse est à chaque instant la dérivée par rapport au temps de l'espace parcouru.

330. — Si l'on construit le diagramme Γ d'un tel mouvement (*fig.* 227), et que l'on place comme nous l'avons déjà fait

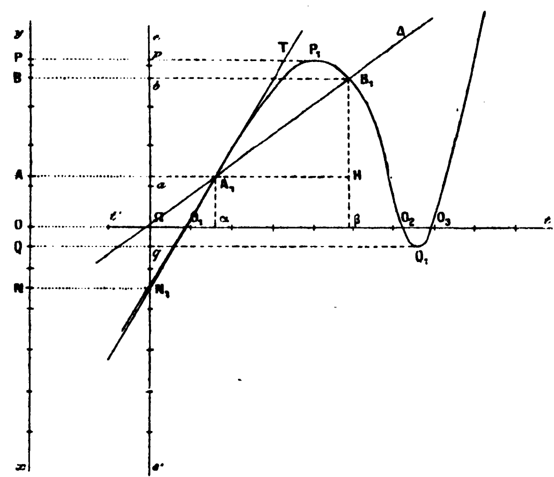


Fig. 227

la trajectoire xy parallèlement à Ωe, les points A, B, ... de xy correspondent aux points A_1, B_1, ... du diagramme d'ordonnées : $\overline{\alpha A_1} = \overline{\Omega a} = \overline{OA}$; $\overline{\beta B_1} = \overline{\Omega b} = \overline{OB}$, ... Le mobile passe en A au temps $t = \overline{\Omega\alpha}$ et en B au temps $t + h = \overline{\Omega\beta}$. Le mobile fictif qui irait d'un mouvement uniforme de A en B, aurait comme diagramme une droite Δ passant par A_1 et B_1, droite qui

est par suite parfaitement déterminée. Si l'on remarque que l'on a, d'une part, $\overline{AB} = \overline{ab} = \overline{HB_1} = k$, et, d'autre part, $\overline{\alpha\beta} = \overline{A_1H} = h$, on voit que la pente de Δ est la vitesse moyenne du mobile de A en B.

Si h tend vers zéro, B tend vers A et par suite B_1 vers A_1 ; la position limite de Δ est la *tangente* (**153**) A_1T en A à la courbe Γ. *Le coefficient angulaire de la tangente est la vitesse* en A. On retrouve, comme on devait s'y attendre, la propriété de la vitesse d'être la dérivée de l'espace parcouru.

Le diagramme d'un mouvement permet, avec un peu d'habitude, de voir immédiatement quelles les sont diverses particularités de ce mouvement. En remarquant qu'ici le mouvement de A sur sa trajectoire xy est la projection du mouvement de A_1 sur son diagramme, on voit qu'à l'origine des temps le mobile est en N, il passe en O au temps $t_1 = \Omega O_1$, sa vitesse diminue jusqu'en P où elle s'annule ; le mobile rebrousse chemin, repasse en O au temps $t_2 = \Omega O_2$; puis sa vitesse s'annule à nouveau au point Q, il repasse en O au temps $t_3 = \Omega O_3$; etc...

331. Mouvement uniformément varié. — Le plus important de tous les mouvements rectilignes à vitesse non constante est celui d'un *mobile dont la vitesse augmente ou diminue de quantités égales en des temps égaux ;* on l'appelle *mouvement rectiligne uniformément varié*. Dans un tel mouvement, l'*accélération* est la quantité positive ou négative dont s'accroît la vitesse dans l'unité de temps, ou, de façon plus précise, le rapport constant d'un accroissement de vitesse au temps qu'il a fallu pour l'obtenir. L'unité d'accélération dans le système C. G. S. est l'accélération d'un mobile dont la vitesse évaluée en « centimètres par seconde » s'accroît de 1 centimètre par seconde ; on la désigne parfois sous le nom de « centimètre-centimètre par seconde ».

Si g est l'accélération d'un mobile de vitesse v_0 au temps o, au temps 1 sa vitesse sera $v_0 + g$; au temps 2 ce sera $v_0 + 2g$,... et l'on verra sans peine que, de façon plus générale, au temps t la vitesse du mobile sera $v_0 + gt$. Quant à la loi des espaces :

$e = f(t)$, elle sera telle que l'on ait : $v = f'(t) = v_0 + gt$. Il résulte des propriétés déjà connues (**155**) que la fonction

$$e = f(t) = \frac{1}{2} gt^2 + v_0 t + e_0$$

dans laquelle e_0 est une constante quelconque donne bien $f'(t) = v_0 + gt$; nous admettrons qu'il n'y a pas d'autre fonction $f(t)$ pouvant convenir. Si l'on remarque que pour $t = 0$, on a $e = e_0$, c'est-à-dire que e_0 est l'abscisse du mobile au temps o, on voit que cela revient à admettre qu'il n'y a qu'un mouvement uniformément varié possible pour lequel le mobile soit à une époque donnée en un point donné avec une vitesse et une accélération données.

Un mouvement uniformément varié ayant comme équation : $e = \frac{1}{2} gt^2 + v_0 t + e_0$, son diagramme est une *parabole* (**160**).

On prend parfois comme origine des temps l'époque à laquelle la vitesse du mobile est nulle, la position correspondante étant prise comme origine des espaces. Avec ces hypothèses, les formules s'écrivent :

$$v = gt$$
$$e = \frac{1}{2} gt^2$$

ce que l'on énonce : *dans le mouvement uniformément varié, les vitesses sont proportionnelles aux temps et les espaces aux carrés des temps employés à les parcourir*, mais on voit que ces énoncés supposent certaines hypothèses qu'il est indispensable de préciser.

332. — On établit en physique que la chute des corps suivant la verticale, abstraction faite de la résistance de l'air, est un mouvement uniformément varié, dont l'accélération g constamment dirigée vers le bas a comme valeur absolue $g = 981$ CGS ; la vitesse d'un corps qui tombe s'augmente donc de $9^m,81$ par seconde ; s'il part du repos, on verra ainsi qu'au bout d'une seconde, il a parcouru $4^m,90$ environ ; au bout de 10 secondes,

490 mètres ; au bout d'une minute, 18 kilomètres, etc... En réalité, au bout de très peu de temps la résistance de l'air rend la chute sensiblement uniforme.

Supposons, pour donner un exemple des problèmes que l'on peut se poser sur la chute des corps, qu'une pierre soit lancée de bas en haut, en un point O d'une verticale xy (*fig.* 228), avec une vitesse initiale de 12 mètres par seconde, soit 1 200 C. G. S. Cherchons pendant combien de temps et à quelle hauteur elle montera ; cherchons enfin combien de temps il lui faudra pour redescendre jusqu'au point de départ. Prenons pour sens positif sur xy, le sens de x vers y. Les formules du mouvement sont ici, en remarquant que $e_0 = 0$, $v_0 = 1\,200$, $g = -981$:

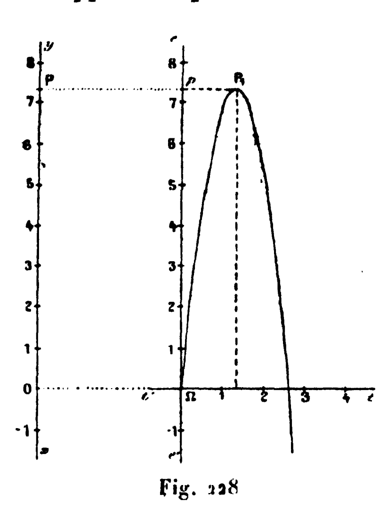


Fig. 228

$$e = -\frac{1}{2} 981\, t^2 + 1\,200\, t$$

$$v = -981\, t + 1\,200.$$

La vitesse de la pierre s'annule au bout d'un temps : $t = \frac{1200}{981} = 1^s,2$.

La hauteur atteinte est :

$$e = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1\,200^2}{981} + \frac{1\,200^2}{981} = \frac{1}{2} \frac{1\,200^2}{981} = \frac{720\,000}{981} = 734 \text{ C. G. S.}$$

soit un peu plus de 7 mètres. La pierre repasse au point O, à une époque t telle que : $-\frac{1}{2} 981\, t^2 + 1\,200\, t = 0$, équation qui a deux racines. La racine 0 qui correspond au début du phénomène ne convient pas. On a donc : $t = \frac{2 \cdot 1\,200}{981} = 2^s,4$, temps double de celui que la pierre avait mis pour monter. La

vitesse qu'elle a est à cet instant :

$$-981 \cdot \frac{2 \cdot 1200}{981} + 1200 = -1200$$

Elle est égale en valeur absolue à la vitesse que la pierre avait au départ. Le diagramme de ce mouvement a été tracé ci-contre (*fig.* 228) ; nous avons déjà dit que c'est une parabole. On a pris comme unité de longueur sur l'axe des espaces une longueur de 1 mètre.

333. Mouvement oscillatoire. — Nous allons étudier encore un exemple de mouvement varié.

Imaginons qu'un mobile M parcoure un cercle de centre O (*fig.* 229) d'un mouvement uniforme, et cela dans un sens quelconque, par exemple dans le sens de la flèche. Le mouvement de sa projection A sur xy est un *mouvement oscillatoire*. On voit, en effet, que ce point A oscille constamment entre P et Q. On appelle parfois *élongation* l'abscisse OA $= e$ qui définit la position du mobile au temps t. La longueur OP $=$ OQ $=$ R est l'*amplitude* du mouvement. Ce mouvement est dit *périodique* parce qu'il se reproduit à des intervalles égaux si ; ω est la vitesse angulaire du point M, la *période* est comme on l'a vu $\theta = \frac{2\pi}{\omega}$ (**328**) et la *fréquence* $n = \frac{1}{\theta} = \frac{\omega}{2\pi}$.

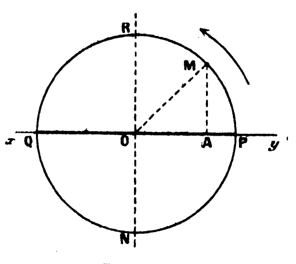


Fig. 229

Supposons qu'à l'origine des temps, le mobile A soit en O, M étant en N ; au bout du temps t, M a décrit un arc NM égal à ωt, et par suite l'élongation de A est :

$$e = \mathrm{R} \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \omega t\right) = \mathrm{R} \cdot \sin \omega t.$$

Pour avoir la vitesse à chaque instant, il faut, comme nous le savons, dériver R . sin ωt (**329**). Nous laissons au lecteur le

soin de faire ce calcul, de tous points analogue au calcul de dérivation de $\sin x$ (**178**) ; il en déduira sans peine pour la vitesse la valeur :

$$v = R\omega \cos \omega t.$$

Il est facile, à l'aide de ces formules, d'étudier le mouvement dans tous ses détails. On verra ainsi que le mobile va de O vers P, avec une vitesse qui décroît depuis ωR jusqu'à o en P ; puis le mobile rebrousse chemin et repasse en O, sa vitesse croissant constamment en valeur absolue de o à ωR. Le mobile va ensuite de O vers Q, la vitesse s'annulant de nouveau en ce point ; enfin il revient vers O, avec une vitesse qui croît jusqu'à ωR. Les temps employés sont les mêmes pour aller de O à P ou de P à O, etc... et égaux à $\frac{\theta}{4}$, en désignant par $\theta = \frac{2\pi}{\omega}$ le temps total. Puis le mobile reprend le même mouvement, et recommence une deuxième *oscillation complète* qu'il accomplit dans le temps θ et ainsi de suite. Le temps $\frac{\theta}{2}$ employé pour aller de P en Q, ou de Q en P, donne la durée d'une *oscillation simple*.

Un tel mouvement, ayant comme équation : $e = R \,.\, \sin \omega t$, son diagramme est une sinussoïde dans le cas particulier où

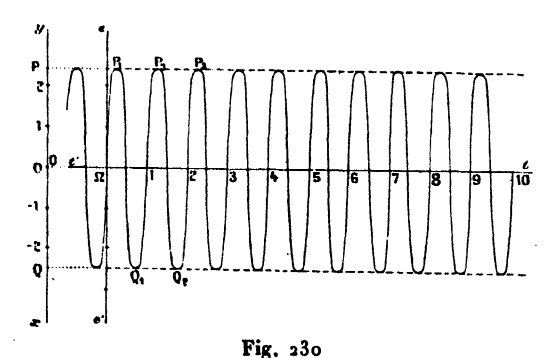


Fig. 230

$R = 1$, et où $\omega = 1$, ce qui correspond à une période de 6 secondes environ ; dans le cas général, on a une courbe de

forme analogue mais à spires plus serrées ou plus allongées suivant les cas. Le tracé a été fait (*fig.* 230) pour une amplitude $R = 2{,}5$ et une fréquence de 1.

Les mouvements oscillatoires se trouvent fréquemment dans la nature, mais leurs amplitudes sont souvent très faibles. On les trouve dans les phénomènes lumineux, acoustiques, dans les vibrations de lames élastiques, etc.... Si l'on regarde un volant en se plaçant dans son plan, chaque point du volant semble animé d'un mouvement oscillatoire. Signalons enfin que pour des oscillations de peu d'amplitude d'un pendule (**324**) le point matériel suspendu décrit sensiblement un segment de droite avec un mouvement oscillatoire; la durée t de chaque oscillation simple est donnée par la formule que nous ne démontrerons pas : $t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$; dans cette formule l est la longueur du pendule et $g = 981$ est l'accélération de la chute des corps.

334. Mouvements simples des corps solides. — Parmi les mouvements dont peut être animé un corps, nous ne parlerons que des trois principaux : la *translation*, la *rotation*, le *mouvement hélicoïdal*.

Dans le *mouvement de translation rectiligne* (**213**, **317**), chaque point du corps décrit une droite, ces diverses trajectoires étant d'ailleurs parallèles entre elles. Les chemins décrits dans un même temps ayant la même longueur pour les divers points du corps, la loi du mouvement est la même pour tous ces points et, en particulier, *la vitesse a la même grandeur pour tous les points du corps*. Le mouvement est dit *uniforme* quand cette vitesse garde une valeur constante pendant tout le mouvement.

On a des exemples de translation rectiligne dans le mouvement d'un tiroir, d'une porte à glissière, d'une tige de piston, d'un traîneau sur la glace, d'un corps qui tombe, etc... etc...

Dans le *mouvement de rotation* (**196**, **318**), les divers points du corps décrivent des cercles ayant comme axe commun l'*axe de rotation*. Les angles dont tournent ces points dans le même

temps étant les mêmes, *la vitesse angulaire* ω *a la même grandeur pour tous les points du corps*. Le mouvement est dit *uniforme* quand cette vitesse angulaire garde constamment la même valeur. Quant à la vitesse linéaire, elle est d'autant plus grande que le point considéré est plus loin de l'axe de rotation (**328**).

On a des exemples de mouvement de rotation dans les mouvements des rouages d'une montre ou d'une horloge, des arbres d'une machine, des volants ou poulies qu'ils entraînent, des charnières d'une boîte, des gonds d'une porte, des plaques tournantes des gares, etc... On trouve les deux mouvements de translation et rotation associés dans un grand nombre de cas. C'est ainsi que pour utiliser une clef on lui fait subir un mouvement de translation qui l'introduit dans la serrure, puis un mouvement de rotation pour faire jouer le pêne qui prend un mouvement de translation. On en trouvera d'autres exemples plus ou moins complexes dans les mouvements d'une courroie de transmission, des roues d'un wagon, d'un cerceau, d'une bille, d'une toupie, etc... etc...

335. — Le *mouvement hélicoïdal* est un cas particulier intéressant de la combinaison des deux mouvements de translation et de rotation. C'est le mouvement d'un tire-bouchon, d'une vis que l'on enfonce dans du bois, etc...

Pour le définir de façon rigoureuse, prenons d'abord le cas simple d'un point matériel A (*fig.* 231) se déplaçant à la surface d'un cylindre de révolution d'axe Oz (**238**). Si ce point était animé d'un mouvement de rotation uniforme autour de Oz de vitesse angulaire ω, il se trouverait au bout du temps t en a, ayant tourné d'un angle ωt; s'il était animé d'un mouvement de translation parallèlement à Oz de vitesse h, il se trouverait en α, ayant parcouru un segment ht. Supposons maintenant qu'au bout du temps t, le point A soit venu en A$'$ sur la génératrice du point a et le parallèle du point α; il a tourné de l'angle ωt et s'est élevé de ht. Si l'on définit de même pour chaque valeur de t la position du point, ω et h ayant toujours les mêmes valeurs, on dit que ce point est animé d'un *mouve-*

ment hélicoïdal. La trajectoire de A est une *hélice* d'axe Oz. On voit que l'*abscisse curviligne* de A′ qui est l'arc $A\alpha$ égal à $R\omega t$, et sa *cote* $\overline{\alpha A'}$ égale à ht sont des grandeurs dont le rapport garde une valeur constante : $\frac{R\omega}{h}$. Quand t augmente

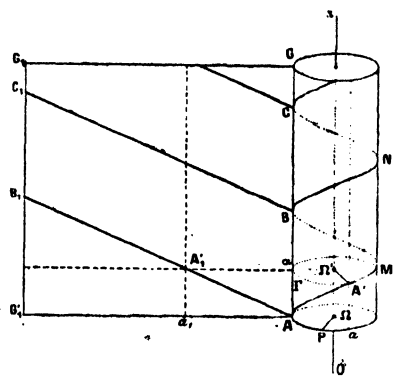


Fig. 231

de $\frac{2\pi}{\omega}$, l'angle de rotation augmente de 2π, et le point A se retrouve sur la même génératrice ; il s'est élevé sur cette génératrice d'une quantité $p = AB = BC$ qu'on appelle le *pas* de l'hélice. On a d'ailleurs $\frac{\omega}{h} = \frac{2\pi}{p}$, d'où $p = \frac{2\pi h}{\omega}$. L'arc AMB d'hélice s'appelle une *spire*.

On peut remarquer que, si l'on suppose la surface du cylindre formée d'une feuille de papier enroulée, et que l'on déroule cette feuille en la fendant suivant une génératrice AG (**273**), ce qui donne le rectangle $AGG_1G'_1$, l'hélice trajectoire du point A se déroule suivant des portions de droite parallèles AB_1, BC_1, etc... de pente égale à $\frac{A'_1a_1}{Aa_1} = \frac{A'a}{\text{arc } Aa} = \frac{ht}{\omega t} = \frac{h}{\omega}$.

336. — Il est facile maintenant d'imaginer un mouvement dans lequel chaque point décrit une hélice de même axe. Dans un tel mouvement, chaque point tourne pendant le temps t d'un angle ωt et s'élève d'une quantité ht ; toute parallèle à l'axe Oz reste parallèle à elle-même ; tout cercle d'axe Oz garde encore Oz comme axe. Si l'on prend deux points A et P d'un cercle

d'axe Oz, leurs trajectoires sont deux hélices se déduisant l'une de l'autre par une rotation d'axe Oz et d'angle constant. Un tel mouvement, que l'on appelle *mouvement hélicoïdal*, est défini, comme on le voit, par la connaissance du mouvement d'un point A quelconque.

Remarquons que les diverses hélices, trajectoires des divers points du corps, ont le même pas, mais elles diffèrent cependant sensiblement de forme : les points les plus voisins de Oz décrivent des hélices presque confondues avec Oz; à la limite on trouverait un mouvement de translation suivant Oz. Au contraire les points très éloignés décrivent des hélices de très grand rayon, mais de spires très serrées ; on peut presque dire que le mouvement d'un tel point est un mouvement de rotation.

Une *vis* a, comme on le sait, la propriété de coïncider constamment avec elle-même si on lui donne un mouvement hélicoïdal convenable; un tel mouvement est réalisé en pratique par la présence d'un *écrou*. Quand l'écrou reste immobile, la vis prend un mouvement hélicoïdal par rapport à lui ; inversement si la vis est immobile, c'est l'écrou qui a un tel mouvement. Le rapport constant $\frac{\omega}{h} = \frac{2\pi}{p}$ est une des caractéristiques de la vis ; il en est de même de son pas p.

Faisons remarquer, pour terminer ces très brèves notions sur le mouvement hélicoïdal, que l'on obtient des hélices non superposables, comme le lecteur s'en assurera aisément, suivant que le mouvement d'ascension de la vis par rapport à son écrou correspond à une rotation dans le sens inverse des aiguilles d'une montre ou à une rotation dans le sens des aiguilles. Le premier cas est le plus fréquent, et l'on dit parfois, sous forme imagée, que « les aiguilles d'une montre passent leur temps à se visser ». Dans le cas contraire, on a une « vis à gauche ».

Exercices. — Nos 102, 103, 143, 145, 270, 471, 472, 473, 474, 475, 476, 477, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 486, 487, 488, 489, 490, 491, 492, 493, 494, 495, 496, 497, 498, 499, 500.

EXERCICES (1)

ARITHMÉTIQUE

CHAPITRE I

NOMBRES ENTIERS

A. — **1.** — Permuter les chiffres 5, 8, 4 et 2 du nombre 5789462 de façon à lui donner la plus grande valeur possible.

A. — **2.** — Combien y a-t-il de jours du 22 juin 1899 au 22 décembre 1899 en y comprenant ces deux jours ? Combien y en a-t-il du 22 décembre 1899 au 22 juin 1900 ?

A. — **3.** — En un lieu donné, le soleil se lève le 22 juin à 3^h58 et se couche à 20^h5 ; la même année, il se lève le 22 décembre à 7^h54 et se couche à 16^h4. De combien de minutes la durée du jour a-t-elle varié d'une date à l'autre ?

A. — **4.** — Classer par ordre de grandeur toutes les puissances de 2, 3 et 5 inférieures à 10 000.

C. — **5.** — On veut assembler les parois d'une caisse dont les dimensions sont en centimètres $22 \times 32 \times 54$. Combien faudra-t-il de pointes, si l'on en met au moins une par 5 centimètres ?

C. — **6.** — Combien peut-on mettre de livres de dimensions $16^{cm} \times 24^{cm}$ et d'épaisseur 4^{cm} dans une caisse de dimensions $15^{cm} \times 42^{cm} \times 50^{cm}$?

C. — **7.** — En quelle année, le mois de février aura-t-il pour la première fois 5 dimanches ?

---

(1) Les exercices les plus faciles sont marqués **A**, ceux de difficulté moyenne **B** ; enfin les plus difficiles sont marqués **C**.

B. — **8.** — Ecrire le nombre 1 000 en numération binaire. L'écrire en numération duodécimale.

B. — **9.** — Le nombre 1 000 000 étant écrit en numération binaire, l'écrire en numération duodécimale.

B. — **10.** — Montrer que les nombres 1, 4, 9, 100, 121, 144, 169, sont des carrés parfaits quel que soit le système de numération de base égale ou supérieure à 10 dans lequel on les suppose écrits.

B. — **11.** — Montrer que les nombres 1, 8, 1 331 sont des cubes parfaits dans tout système de numération de base au moins égale à 10.

B. — **12.** — Dresser la liste des produits de tous les nombres de un chiffre par des nombres de un chiffre dans le système duodécimal.

C. — **13.** — Montrer que des longueurs de 1^{cm}, 2^{cm}, 4^{cm}, 8^{cm}, 16^{cm}, 32^{cm}, 64^{cm}, ajoutées bout à bout permettent de mesurer à 1^{cm} près toutes les longueurs inférieures à $1^{m},27$.

C. — **14.** — Les nombres a et n étant des entiers, prouver que l'on a pour $n > 1$ l'inégalité : $(1 + a)^n > 1 + na$.

CHAPITRE II

DIVISIBILITÉ — NOMBRES PREMIERS

A. — **15.** — Une personne qui travaille 5 jours de suite et se repose le 6me, commence à travailler un mardi. Au bout de combien de jours se reposera-t-elle pour la première fois un dimanche ?

B. — **16.** — Un nombre divisible par 6 reste encore divisible par 6 si l'on change l'ordre de ses chiffres, pourvu qu'on ne touche pas au dernier.

B. — **17.** — A quels caractères peut-on reconnaître qu'un nombre est divisible par 45 ?

C. — **18.** — Quelles sont les pesées que l'on peut faire en n'utilisant que les cinq poids suivants : 1^{gr}, 3^{gr}, 9^{gr}, 27^{gr}, 81^{gr} ? On supposera que ces poids peuvent être mis dans l'un quelconque des plateaux de la balance.

B. — 19. — Peut-on effectuer une pesée à 1^{gr} près en n'utilisant que des pièces de $0^{fr},05$, qui pèsent 5^{gr}, et de $0^{fr},25$, qui pèsent 7^{gr}?

C. — 20. — Peut-on obtenir une longueur de 10^{cm} en employant exclusivement des pièces d'argent de 5^{fr}, 2^{fr}, 1^{fr} de diamètres respectifs 37^{mm}, 27^{mm}, 23^{mm} et en les mettant côte à côte?

C. — 21. — On place une longueur AB contre un mètre divisé en centimètres, de façon que le point A soit au zéro de la graduation ; contre l'extrémité B, on dispose une réglette, appelée « vernier », de 49^{cm} de longueur divisée en 50 parties égales. Si la longueur AB ne comprend pas un nombre exact de centimètres, montrer que deux traits consécutifs du vernier se trouveront compris entre deux traits du mètre divisé. Que peut-on déduire pour la longueur de AB de la lecture de ces traits ?

C. — 22. — On veut dresser un « crible d'Eratosthène » en mettant sur la première ligne les entiers 1, 2, 3, ... 29, 30; sur la seconde ligne, et au-dessous des nombres de la première, 31, 32, 33, ... 59, 60 et ainsi de suite. Montrer qu'il y a des colonnes de nombres dont aucun n'est premier.

A. — 23. — Décomposer en facteurs premiers les nombres 604 800 et 12 259.

A. — 24. — Les nombres 1 009 et 1 007 sont-ils premiers ?

A. — 25. — Le nombre $2^9.3^{12}.5^9.7^6$ est-il un carré parfait ? Est-il un cube parfait ?

A. — 26. — Le produit de trois nombres entiers consécutifs est-il toujours divisible par 6 ?

B. — 27. — Décomposer en facteurs premiers le produit des 100 premiers nombres.

B. — 28. — Quels sont les facteurs premiers que l'on est certain de trouver si l'on décompose en facteurs premiers le produit de douze nombres entiers consécutifs.

B. — 29. — Une égalité telle que $ab - cd = 1$ ne peut avoir lieu entre quatre entiers a, b, c, d que si a ou c d'une part et b ou d d'autre part sont premiers entre eux.

B. — 30. — Deux entiers consécutifs sont toujours premiers entre eux. En est-il de même de deux entiers dont la différence est 7 ?

A. — 31. — Quel est le plus grand commun diviseur des deux nombres 86 400 et 22 680 ? Quel est leur plus petit commun multiple ?

C. — 32. — Quel est le plus petit cube en maçonnerie que l'on peut faire avec des briques de dimensions : $18^{cm} \times 11^{cm} \times 5^{cm}$? On suppose que les briques sont disposées de façon que leurs côtés égaux soient toujours parallèles. Résoudre la même question en tenant compte de ce que deux briques voisines sont séparées par une épaisseur de 1^{cm} de mortier ?

C. — 33. — On veut parqueter une salle, de $3^{m},50$ sur $4^{m},55$, avec des carrés de marqueterie dont les dimensions soient aussi grandes que possible. Quelle sera la longueur du côté de ces carrés ?

C. — 34. — Tout le long d'une bordure rectangulaire de $15^{m},60$ sur $11^{m},70$, on veut planter des arbustes en les plaçant à égale distance les uns des autres. Quelle sera cette distance, si l'on veut mettre environ un arbuste par mètre courant avec un arbuste à chaque coin de la bordure ?

CHAPITRE III

FRACTIONS — RACINES

A. — 35. — Simplifier les fractions $\frac{1.3.5.7.9.11}{2.4.6.8.10.12}$ et $\frac{13.12.11.10.9}{1.2.3.4.5}$.

A. — 36. — Diviser $\frac{14.13.12.11.10}{1.2.3.4.5}$ par $\frac{12.11.10.9.8}{1.2.3.4.5}$.

C. — 37. — Classer par ordre de grandeur toutes les fractions irréductibles telles que la somme de leur numérateur et de leur dénominateur soit au plus égale à 10.

C. — 38. — Un joueur joue, à chaque partie, $\frac{1}{n}$ de la somme qu'il possède à ce moment-là. Montrer que, quel que soit l'entier n, le joueur perd toujours, si le nombre des parties gagnées est le même que celui des parties perdues. On montrera également que, quel que soit le nombre des parties gagnées ou

perdues, il ne retrouvera jamais exactement la somme qu'il avait au début.

A. — **39.** — Est-il plus avantageux de prendre deux morceaux de sucre de « 90 à la livre », ou un morceau de « 120 à la livre » et un de « 60 à la livre » ? On dit que des morceaux de sucre sont de « 90, 120, ... à la livre » lorsqu'il en faut 90, 120, ... pour faire un demi-kilo.

A. — **40.** — On suppose qu'une balle, lâchée à 5^m de hauteur, rebondit du tiers de sa hauteur, puis retombe et rebondit du tiers de cette nouvelle hauteur et ainsi de suite. Après combien de bonds ne remontera-t-elle pas à plus d'un centimètre ?

B. — **41.** — Un examen porte sur deux matières affectées des coefficients 7 et 3. Le résultat doit être noté de 1 à 10 à un demi-point près, chaque matière étant notée séparément de 1 à 10 à un point près. Dresser un tableau carré donnant, par une simple lecture, la note définitive d'un examen quelconque, connaissant les notes obtenues pour chaque matière.

A. — **42.** — Si un gaz, pris à 0°, est maintenu à pression constante, son volume augmente environ de $\frac{1}{273}$ du volume primitif pour chaque élévation de température de 1°. A quelle température faut-il porter ce gaz, si l'on veut que son volume s'accroisse de un cinquième ?

C. — **43.** — L'herbe d'un pré a 5^{cm} de hauteur lorsqu'on y met un bœuf, qui, le premier jour, broute une surface de 20^{m^2}. Si l'on suppose que l'herbe pousse d'un quart de centimètre par jour, quelle doit être la surface du pré pour que le bœuf ait tous les jours une quantité d'herbe suffisante ?

B. — **44.** — Deux fractions ayant comme numérateur l'unité, montrer qu'il en est de même de leur différence, si leurs dénominateurs sont deux nombres entiers consécutifs.

B. — **45.** — Deux fractions ayant comme numérateurs l'unité, en est-il de même de leur différence, si les dénominateurs sont deux nombres pairs consécutifs ? Généraliser.

B. — **46.** — a et b étant deux entiers, classer par ordre de grandeur les fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{a+1}{b+1}$, $\frac{a+2}{b+2}$, $\frac{a+3}{b+3}$, ...

A. — **47.** — Développer en fractions décimales $\frac{175}{37}$ et $\frac{125}{32}$.

A. — **48.** — Mettre sous forme de fractions ordinaires les nombres décimaux 0,625 et 2,6875.

C. — **49.** — Sachant que $\frac{1}{7}$ est une fraction périodique de période 142857, en déduire que les produits de ce nombre par 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 sont formés des mêmes chiffres.

C. — **50.** — En désignant par a, b, c, ... m les chiffres successifs de la fraction périodique 0, abc ... $mabc$ ... m ..., montrer que cette fraction est le développement de la fraction ordinaire $\frac{abc \ldots m}{999 \cdots 9}$.

C. — **51.** — Donner tous les dénominateurs de fractions irréductibles qui, mises sous formes de fractions périodiques, ont des périodes de 1, 2 ou 3 chiffres.

C. — **52.** — Dresser la table des quarts des carrés des nombres de 1 à 100. Utiliser une telle table pour avoir le produit de deux entiers quelconques, de somme inférieure à 100, en s'appuyant sur l'identité : $ab = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4}$.

A. — **53.** — Calculer, à un dixième près : $\sqrt{7243}$.

A. — **54.** — Calculer à $\frac{1}{10}$ près : $\sqrt[4]{7}$.

B. — **55.** — Classer $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{4}$, $\sqrt[5]{5}$, $\sqrt[6]{6}$, $\sqrt[7]{7}$, $\sqrt[8]{8}$, $\sqrt[9]{9}$ par ordre de grandeur.

C. — **56.** — Quelles sont les dimensions d'un cylindre ayant un litre de capacité, étant donné que sa hauteur est égale au diamètre de sa base ?

B. — **57.** — Quel est le rayon d'une sphère en fer pesant 23^{kgs} ? La densité du fer est 7,7.

CHAPITRE IV

MESURE DES GRANDEURS

A. — **58.** — Calculer a, b et c dans les proportions : $\frac{9}{7} = \frac{3}{a} = \frac{b}{8} = \frac{c}{b}$.

C. — **59.** — Les deux proportions suivantes : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ et $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{c}}{\sqrt{b}+\sqrt{d}} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{d}}$ sont-elles équivalentes?

B. — **60.** — Un ouvrier qui travaille 6 jours par semaine économise un cinquième de son salaire journalier. Quel est le nombre de jours de chômage qu'il ne devra pas dépasser en un an, pour que ses recettes puissent équilibrer ses dépenses ?

B. — **61.** — Combien faudra-t-il approximativement de voyelles pour imprimer 16 pages d'un volume, sachant que chaque page comprend 36 lignes de 54 caractères environ, et que, sur 100 lettres, on trouve en moyenne 18 fois « e », 8 fois « a », 7 fois « i », 7 fois « u », 5 fois « o » et 3 fois « y » ?

C. — **62.** — Un élève a dans sa semaine 8 heures de classe de mathématiques, 5 heures de physique ou de chimie, 2 heures de sciences naturelles, 3 heures d'histoire ou de géographie, 3 heures de langues vivantes et enfin 3 heures de philosophie. Il veut leur consacrer 26 heures d'études par semaine. Faire à un quart d'heure près le partage de ces 26 heures entre ces diverses matières.

B. — **63.** — Le budget de la France comprenant environ 4 milliards, dont 300 millions pour l'instruction publique et 1100 millions pour l'armée et la marine, quelle est la somme que verse pour l'instruction publique d'une part, l'armée et la marine d'autre part, un citoyen qui paie 100 fr. d'impôts? La part du département et de la commune sera supposée égale à 54 pour 100.

C. — **64.** — Dans une partie de campagne où se trouvaient quatre personnes, la première a fourni les deux tiers des provisions, le reste étant apporté par la seconde. Les deux autres personnes ont versé chacune 3 fr. pour leur part. Faire la répartition de ces 6 fr. entre les deux premières personnes.

C. — **65.** — L'air est un mélange composé approximativement de 23 pour cent de son poids d'oxygène et de 77 pour cent d'azote. Quelle est la composition en volume de l'air d'une pièce de dimensions $4^m \times 5^m \times 3^m$, sachant que la densité de l'oxygène par rapport à l'air est de 1,111 ? Quelle est par rapport à l'air la densité de l'azote?

B. — 66. — Dans une salle contenant 60^{m3} d'air, combien faut-il enlever de litres d'air pour les remplacer par le même volume d'oxygène pur, si l'on veut que l'air de la salle contienne un tiers de son volume d'oxygène ?

C. — 67. — On a deux récipients contenant l'un 12 litres de vin et l'autre 12 litres d'eau ; on enlève 1 litre de vin du premier et on le met dans le second. On prend ensuite 1 litre de ce mélange pour le remettre dans le premier récipient. Le résultat de ces deux opérations est-il le même que si l'on avait opéré cet échange dans l'ordre inverse ?

C. — 68. — On porte à la Caisse d'épargne postale une somme de 400 fr. le 10 janvier et on la retire le 20 décembre de l'année suivante. Quelle est la somme qui sera rendue ? L'intérêt de 2,5 pour cent ne compte que par quinzaine du 1er au 15 de chaque mois et du 16 à la fin du mois. A la fin de chaque année, les intérêts sont ajoutés au capital.

C. — 69. — A quelle distance peut-on lire l'heure sur un cadran de 1^{m},50 de diamètre, de façon à ne pas commettre une erreur de plus d'une minute ? On sait que « l'acuité visuelle » moyenne de l'œil est environ de un trois-millième, c'est-à-dire, ici, que deux positions voisines de l'aiguille des minutes sont distinguées par l'œil si l'écartement des pointes est au moins le trois-millième de la distance de l'œil au cadran.

A. — 70. — Lorsqu'un navire file *a* « nœuds », cela veut dire que sa vitesse est de *a* « milles » par heure, le mille étant la longueur d'une minute du méridien terrestre. Quelle est alors la vitesse du navire en kilomètres à l'heure ?

B. — 71. — En pratique, lorsqu'un navire file *a* « nœuds » (voir l'exercice **70**), on obtient sa vitesse en kilomètres à l'heure en multipliant *a* par 2 et retranchant du produit son dixième. A partir de quelle vitesse l'erreur ainsi commise atteint-elle un kilomètre à l'heure ?

A. — 72. — Convertir une vitesse donnée en « kilomètres à l'heure » en une vitesse en « mètres par seconde ».

A. — 73. — Quelle est, au plus, l'erreur commise en considérant comme constant l'écartement de deux verticales prises à 5^{m} l'une de l'autre et ayant chacune 3^{m} de longueur ?

B. — 74. — Une bougie de 25^{cm} de long. a mis $1^h 10^m$ pour diminuer de longueur de un cinquième ; quelle est la distance des traits que l'on marquera sur cette bougie, si l'on veut que l'intervalle de deux traits corresponde à un éclairage d'une demi-heure ?

A. — 75. — Delambre et Méchain ont trouvé pour la longueur du degré du méridien terrestre 57008 « toises » ; quelle était la longueur en mètres de la « toise » ?

A. — 76. — Quelle est en C.G.S. la distance du Soleil à Neptune, sachant que cette distance est en moyenne 30 fois plus grande que celle de la Terre au Soleil et que cette dernière est parcourue par la lumière en 8 minutes, à raison de 300 000 kilomètres par seconde ?

A. — 77. — Une main de papier de 25 feuilles pèse 200^{gr}. Les dimensions de chaque feuille sont $32^{cm} \times 40^{cm}$. Quel est le poids de 1^{cm2} de ce papier ? Quelles sont les dimensions d'un carré découpé dans ce papier, s'il pèse un demi-gramme ?

B. — 78. — Quelles sont la surface des eaux et celle des continents sur la sphère terrestre, sachant que la première surface est approximativement trois fois plus grande que la deuxième ?

A. — 79. — Quel est le volume d'une plaque de tôle de 12^m de longueur, 45^{cm} de largeur et $0^{mm},3$ d'épaisseur ?

A. — 80. — A quelle distance faut-il placer deux piquets de $1^m,20$ de hauteur pour pouvoir mesurer un stère de bois avec des rondins de $0^m,80$ de long ?

A. — 81. — Combien faudrait-il jeter de cailloux, de un centimètre cube environ de volume, dans un bassin circulaire de 3^m de diamètre, pour faire élever le niveau de l'eau de un centième de millimètre ?

B. — 82. — Quelle est la capacité d'un récipient qui, plein d'eau, pèse 980^{gr} et, à moitié plein, pèse 580^{gr} ?

A. — 83. — Comparer un centilitre et un centimètre cube. Comparer un hectolitre et un mètre cube.

B. — 84. — On décèle à l'analyse radioactive 10^{-10} grammes de radium dilués dans 1^{gr} de matières radioactives. Quel poids de ces matières faudrait-il prendre pour avoir $0^{mmg},1$ de radium ?

C. — **85.** — Quelles longueurs de fil de fer faut-il prendre pour former des poids de $0^{gr},5$; 1^{gr} ; 2^{gr} ; 5^{gr} ; 10^{gr}, sachant que la densité de ce fil est 7,5 et son diamètre 2^{mm} ? Quelle erreur entraînerait sur chaque poids une erreur de $0^{mm},5$ sur la mesure de la longueur du fil de fer ? Quelle serait l'erreur sur chaque poids pour une erreur de $0^{mm},05$ dans la mesure du diamètre ?

C. — **86.** — Un commerçant a une balance dont les bras n'ont pas la même longueur, de sorte qu'un poids mis dans l'un des plateaux équilibre dans l'autre un poids supérieur de un dixième. S'il vend deux fois de suite 1^{kg} de marchandise, en mettant les poids marqués d'abord dans l'un des plateaux, puis dans l'autre, a-t-il donné au total plus ou moins de 2^{kg} de marchandises ?

B. — **87.** — Quel est le poids d'une somme de 50 fr., sachant que les quatre cinquièmes de cette somme sont en argent et le reste en billon, sauf $1^{fr},25$ en pièces de nickel ?

C. — **88.** — Quel est le poids le plus grand et quel est le poids le plus petit que l'on puisse réaliser avec une somme de $3^{fr},75$, suivant la nature des pièces dont elle est formée ?

CHAPITRE V

ERREURS — CALCULS NUMÉRIQUES

C. — **89.** — On veut mesurer la durée d'une oscillation d'un pendule avec une approximation de un deux-centième de seconde. Combien faudra-t-il observer d'oscillations, sachant que la lecture de l'heure au début et à la fin entraîne chaque fois une erreur qui peut atteindre un cinquième de seconde ?

B. — **90.** — On a mesuré avec un mètre en bois une longueur qui a été trouvée égale à $73^{m},47$. La longueur du mètre employé peut comporter une erreur de 1^{mm} ; chaque transport du mètre peut entraîner une nouvelle erreur de $1^{mm},5$. Enfin la lecture finale n'est exacte qu'à $1^{mm},5$ près. Que peut-on dire sur la valeur exacte de la longueur mesurée ?

C. — **91.** — Quelle devrait être la précision d'une balance qui apprécierait l'addition à une certaine quantité de lait d'un dixième de son volume en eau ? La densité du lait est 1,03.

Traiter la même question, en supposant qu'il s'agisse d'une addition d'eau d'un quart du volume.

B. — 92. — Quelle serait la précision d'une balance qui apprécierait l'existence d'un dépôt de un quatre cent-millième de millimètre d'argent sur une plaque de verre de 3^{cm} de rayon, plaque pesant 20^{gr} ? La densité de l'argent est 10,5.

B. — 93. — Quelle est la hauteur de la façade d'une maison, si cette façade comprend 132 couches superposées de briques, chaque couche ayant $7^{cm},6$ d'épaisseur ? Quelle est l'erreur qu'entraîne pour une pareille mesure une erreur de $0^{mm},5$ sur l'épaisseur d'une brique ?

B. — 94. — Divers auteurs ont proposé les valeurs approchées suivantes pour le nombre

$$\pi = 3,14159\ 26535\ 89793\ 23846...$$

3	Bible	$\sqrt{3} + \sqrt{2}$	
$\sqrt{10}$	Arabes	$\frac{3}{4}(\sqrt{3} + \sqrt{6})$	Cusa
$\frac{49}{16}$	Bauhayana	$\sqrt{51} - 4$	
$3\frac{17}{120}$	Ptolémée	$\frac{1}{3}\sqrt{120 - 18\sqrt{3}}$	Koskanski
$\frac{22}{7}$	Archimède	$\frac{13}{50}\sqrt{146}$	Specht
$3,1416$	Apollonius	$\frac{501 + 80\sqrt{10}}{240}$	Gergonne
$\frac{355}{113}$	Métius	$\sqrt[3]{31}$	

Classer ces diverses valeurs suivant le degré de leur approximation.

A. — 95. — Quelle est l'erreur relative commise dans une pesée de 10^{kgs} effectuée à un dixième de milligramme près ? Quelle est l'erreur relative commise dans la fabrication d'un arbre de machine ayant 30^{cm} de diamètre, si ce diamètre est obtenu à un dixième de millimètre près ?

C. — 96. — Un arpenteur a trouvé pour les trois côtés d'un triangle rectangle : $4^{m},50$, 3^{m} et $5^{m},40$. Quelle est approximativement la précision qu'il obtient dans ces mesures ?

B. — 97. — On emploie parfois dans l'équarrissage des troncs d'arbre la formule suivante : le côté du carré équivalent à un cercle donné est égal au quart du périmètre de ce cercle. Quelle est l'erreur relative que l'on commet en employant cette formule ?

A. — 98. — Effectuer la multiplication abrégée de π par $\sqrt{2}$, avec 3 chiffres exacts au résultat.

A. — 99. — Effectuer la division abrégée de 1 par 2,718281828 ... avec 4 chiffres exacts au résultat.

A. — 100. — Montrer que : pour multiplier un nombre par 99, on peut le multiplier par 100, puis retrancher le nombre du résultat ; pour diviser un nombre par 5, on peut le multiplier par 2, puis prendre le dixième du résultat ; pour multiplier un nombre par 5, on peut multiplier par 10 la moitié de ce nombre.

ALGÈBRE

CHAPITRE I

NOMBRES POSITIFS OU NÉGATIFS

A. — 101. — Un thermomètre marque 17° au-dessous de zéro. Sa température est d'abord élevée de 20°, puis elle baisse ensuite de 1° par 5 minutes. Quelle est la température qu'il marque au bout d'un quart d'heure ? Au bout de combien de temps sera-t-il à — 15° ?

A. — 102. — Le calendrier Russe retarde actuellement de 13 jours sur le nôtre. Quels jours correspondent dans ce calendrier au 1er Janvier ? au 1er Mai ? au 25 Décembre ? Quels jours de notre calendrier correspondent aux mêmes dates du calendrier russe ?

A. — 103. — Le temps étant supposé compté positivement à partir du 1er Janvier à midi, quelles sont les époques qui correspondent aux temps évalués en heures : $+835$; -15 ; -1543 ?

B. — 104. — Une personne, dont la montre avance de 8 minutes, part de chez elle 13^m avant l'heure ou elle doit prendre le train. Sachant qu'elle met environ 25^m pour se rendre à la gare, on demande qu'elle est la durée du retard que doit avoir le train pour que cette personne puisse le prendre ?

B. — 105. — Quelle est la longitude par rapport à Greenwich de la ville russe de Cronstadt, sachant que par rapport à Saint-Pétersbourg sa longitude est $32'15''$ (O) ? D'autre part les longitudes de Greenwich et Saint-Pétersbourg par rapport à Paris sont $2°20'14''$ (O) et $27°58'8''$ (E), en désignant par (E) les longitudes orientales et par (O) les occidentales.

A. — 106. — Calculer :

$$-\left[(-3)+\left(-\frac{5}{2}\right)-(+0{,}7)\right]\left[-(+2-0{,}4)-1+8.\right]$$

B. — 107. — On donne la suite des nombres :

$$1 \quad -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad -\frac{1}{4} \quad \frac{1}{5} \quad -\frac{1}{6} \quad \frac{1}{7} \quad \dots$$

On prendra dans cette suite le nombre 1 ; puis 1 suivi d'un nombre suffisant de termes négatifs pour obtenir un résultat négatif, soit $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}$; puis à cette somme on ajoutera un nombre suffisant de termes positifs non encore employés : $\frac{1}{3}$ ... pour avoir un résultat positif ; puis on prendra encore des termes négatifs et ainsi de suite. Calculer les 7 premières sommes ainsi obtenues.

C. — 108. — Etant donnés une aire plane et un axe Ox dans son plan, on considère parfois comme positive toute portion de cette aire située au-dessus de Ox et négative toute portion située au-dessous. Montrer, qu'avec ces conventions, l'aire change de signe quand on la remplace par sa symétrique par rapport à Ox.

C. — 109. — Deux axes rectangulaires $x'Ox$ et $y'Yy$ partagent le plan d'une certaine aire donnée en 4 régions ; on considérera comme positives les portions de cette aire situées dans l'angle xOy ou l'angle $x'Oy'$ et négatives les portions situées dans les deux autres angles. Que devient cette aire si on la rem-

place par sa symétrique par rapport à un des axes, ou par rapport au point O ?

C. — 110. — On considère, dans le plan d'un polygone concave ou convexe ABCD ... LA, un point O et l'on forme des divers triangles OAB, OBC, OCD, ... OLA. On considérera l'aire de l'un de ces triangles comme positive ou négative suivant que l'angle, aigu ou obtus, de OA avec OB ; de OB avec OC ; ... de OL avec OA est positif ou négatif, un sens de rotation des angles ayant été préalablement fixé autour de O. Avec cette convention, montrer que l'aire du polygone est la valeur absolue de la somme algébrique des aires des triangles. Peut-on interpréter le signe de cette somme algébrique ?

C. — 111. — Si l'on applique les propriétés précédentes (exercice n° **110**) au cas où les points A, B, C ... L sont en ligne droite, que peut-on en déduire ?

C. — 112. — Dans le cas où le polygone ABC est un triangle équilatéral, déduire de cette même propriété (exercice n° **110**) une relation algébrique entre les distances d'un point O quelconque du plan aux trois côtés de ce triangle.

A. — 113. — Classer par ordre de grandeur les nombres :

$$0 \quad -1 \quad 0{,}62 \quad -0{,}75 \quad 0{,}83 \quad \frac{2}{3} \quad \frac{-3}{4} \quad \frac{-8}{11} \quad \frac{-9}{10}$$

CHAPITRE II

CALCUL ALGÉBRIQUE

B. — 114. — Y a-t-il des cas où l'on peut multiplier ou diviser membre à membre deux inégalités arithmétiques ou algébriques ?

A. — 115. — Calculer : $\dfrac{(-3)^5(-2)^2}{(-5)^3} \cdot \dfrac{125}{4^2(-9)^3}$.

B. — 116. — On place une lentille en un point O d'un axe $x'Ox$ sur lequel on a fixé comme sens positif $x'x$; un point lumineux d'abscisse p sur l'axe donne sur ce même axe une image dont l'abscisse p' se mesure avec le nouveau sens positif xx'. Avec ces deux conventions, on démontre que la

relation qui lie p à p' est : $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$, f étant une quantité fixe, positive pour une lentille convergente et négative pour une lentille divergente. Sous quelle forme simple se met cette relation, si l'on prend comme nouvelle origine des abscisses pour le point lumineux le point F d'abscisse f et pour son image le point F' d'abscisse f ?

B. — **117.** — Pour l'étude des lentilles, dont il s'agit dans l'exercice précédent (n° **116**), les longueurs étant évaluées en centimètres, on appelle habituellement « dioptrie » l'inverse d'une longueur p ou p'. L'inverse de f est le « numéro » de la lentille. Si l'on suppose que l'on accole au point O plusieurs lentilles, chacune d'elles transforme l'image donnée par la précédente pour en donner une nouvelle. Déduire de ce qui précède que l'ensemble de plusieurs lentilles ainsi accolées équivaut à une nouvelle lentille ayant pour « numéro » la somme algébrique des « numéros » des précédentes.

C. — **118.** — Peut-on résoudre en nombres entiers l'égalité $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$ en s'appuyant sur le calcul de l'exercice n° **116** ?

C. — **119.** — Etant donné, sur un axe, quatre points : A, B, C, D, d'abscisses respectives : a, b, c, d, montrer que la quantité $\frac{(a-c)(b-d)}{(b-c)(a-d)}$ ne change pas si l'on change l'origine des abscisses. En est-il encore de même si l'on remplace a, b, c, d par ka, kb, kc, kd ? par $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{d}$?

B. — **120.** — Vérifier que $ax^2 + bx + c$ devient nul quand $x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. On suppose $b^2 - 4ac$ positif.

B. — **121.** — Vérifier que $x^3 + px + q$ devient nul pour $x = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\alpha'}$, en posant $18\alpha = -9q + \sqrt{3(4p^3 + 27q^2)}$ et $18\alpha' = -9q - \sqrt{3(4p^3 + 27q^2)}$. On suppose $4p^3 + 27q^2$ positif.

C. — **122.** — Un père verse 100 fr. par an pour ses deux enfants âgés de 3 ans et 5 ans à l'époque du premier versement. Il partage, chaque année, cette somme de façon que le capital total de chaque enfant soit proportionnel à l'âge qu'il a au

moment du versement. Quelle formule peut-il employer pour savoir chaque année comment faire ce partage ?

C. — 123. — Peut-on trouver en s'appuyant sur l'identité : $(n+1)^2 - n^2 \equiv 2n+1$ un triangle rectangle dont les côtés soient trois nombres entiers ?

C. — 124. — On veut casser une barre PQ en trois morceaux pour en faire les côtés d'un triangle. L'un des points de cassure étant en A, quelles sont les régions de la barre où l'on fera une seconde cassure pour avoir les morceaux demandés ?

A. — 125. — Vérifier les identités :

$$x^4 + 4 \equiv (x^2 + 2x + 2)(x^3 - 2x + 2)$$
$$x^4 + x^2 + 1 \equiv (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1).$$

B. — 126. — Montrer que le produit de quatre nombres entiers consécutifs augmenté de 1 est un carré parfait.

B. — 127. — Si l'on appelle nombre « triangulaire » le demi-produit de deux entiers consécutifs, montrer que tout « triangulaire » multiplié par 8, puis augmenté de 1 devient carré parfait.

A. — 128. — Effectuer la somme des cinq polynomes :

$-2x^4 + 3x^3 + 5x^2 - 2x + 3$; $x^4 - 4x^2 + 3x + 2$; $-2x^3 + 3x -$; $-2x^4 + 4x^3 - 5$; $3x^4 - 5x^3 - x^2 - 4x$.

A. — 129. — Quel est le cube de $1 - 2x + x^2$?

A. — 130. — Diviser $(1 - 2x + x^2)^3$ par $(1 - x)^3$.

A. — 131. — Diviser $8x^5 - 3x^3 + 9x^2 - 1$ par $x^3 - x + 1$.

C. — 132. — Montrer qu'un polynome est divisible par $x - a$, s'il s'annule quand on y remplace x par a, et réciproquement, que si un polynome s'annule pour $x = a$, il est divisible par $x - a$.

CHAPITRE III

ÉQUATIONS ET PROBLÈMES DU PREMIER DEGRÉ

C. — 133. — 10 000 électeurs ont voté pour nommer 5 députés. On suppose que deux partis A et B se partagent tous les suffrages émis, A ayant a voix et B en ayant b. On cherchera les valeurs que doit prendre a pour que le parti A ait droit à 5, 4, 3... sièges dans chacune des trois hypothèses sui-

vantes : 1° la répartition des sièges se fait d'après la « règle d'Hondt » : on compare les quotients : $\frac{a}{1}, \frac{a}{2}, \frac{a}{3}, \ldots\ldots \frac{b}{1}, \frac{b}{2}, \frac{b}{3}$ ...... Le parti A a autant de sièges qu'il y a de quotients provenant de a dans les cinq plus forts quotients; 2° On emploie la « règle des moindres carrés » en remplaçant dans la règle précédente les dénominateurs 1. 2, 3, 4... par 1, 3, 5, 7... ; 3° On emploie la « règle des grands restes » en divisant a et b par 2 000 et donnant à chaque parti un nombre de sièges égal à ce quotient ; s'il reste un siège à attribuer on le donne au parti pour lequel le reste de la division est le plus grand.

A. — 134. — Résoudre l'équation : $3x - 2 = -6 + 7x$

A. — 135. — Résoudre l'équation :

$$\sqrt{4x^2 - 2x + 4} = -2x + 8$$

B. — 136. — Résoudre les diverses inégalités :

$$3x - 2 > -6 + 7x \qquad \sqrt{4x^2 - 2x + 4} > -2x + 8$$
$$3x - 2 < -6 + 7x \qquad \sqrt{4x^2 - 2x + 4} < -2x + 8$$

A. — 137. — Résoudre l'inégalité : $\frac{3x - 4}{-x - 3} > 0$

A. — 138. — Résoudre le système : $\begin{cases} -x - y + 15 = 0 \\ 2x - 4y + 9 = 0 \end{cases}$

A. — 139. — Résoudre le système : $\begin{cases} 2x - 4y + 9 = 0 \\ -x - y + 15 > 0 \end{cases}$

A. — 140. — Résoudre le système : $\begin{cases} 8x - 2y + z = 0 \\ x = z + 7 \\ 2x = y \\ 9x - 2y = 7. \end{cases}$

A. — 141. — Résoudre le système : $\begin{cases} x - y + u = 4 \\ 2z = 1 \\ 7z + y = u + x. \end{cases}$

C. — 142. — Trouver un nombre de deux chiffres sachant que si l'on renverse l'ordre des chiffres la somme de ces deux nombres est 88, et que d'autre part la somme des chiffres de ce nombre est 8.

B. — 143. — Un aviateur va en 1^h5^m avec un vent supposé constant à 140^{km} de distance et dans les mêmes conditions revient au point de départ en 40^m. Quelle est sa vitesse propre ?

B. — **144**. — En deux lieux voisins : A et B se trouvent deux horloges. On veut régler l'horloge de A à l'aide de celle de B comme il suit : on part de A à 9^h15, heure lue en A, et l'on arrive en B à 9^h30, heure lue en B. On revient immédiatement en A où l'horloge marque 9^h31. Quelle est la différence des heures en A et B ?

C. — **145**. — Deux trains marchant sur des voies parallèles ont des vitesses respectives de 90^{km} et de 30^{km} à l'heure. Le premier a 80^m de long et le second 120^m. On demande quelle est la durée du croisement de ces deux trains, suivant qu'ils vont ou non dans le même sens ?

B. — **146**. — Une personne veut faire une promenade en canot pendant une heure. Elle part contre le courant de la rivière avec une vitesse propre de 4^{km} à l'heure. Sachant que la vitesse du courant est de $2^{km},5$ à l'heure, on demande au bout de combien de temps elle doit revenir en arrière ?

C. — **147**. — Un bouchon cylindrique, en liège, de densité 0,24, a 2^{cm} de diamètre et 3^{cm} de hauteur. On enfonce dans l'axe de ce bouchon une tige de fer de 4^{mm} de diamètre et de densité 7 de façon à maintenir le bouchon en équilibre au milieu de l'eau d'un vase. Entre quelles limites doit varier la longueur de cette tige pour que ce résultat puisse être obtenu ?

C. — **148**. — Deux observateurs se trouvent à une même distance a d'un mur. L'un d'eux émet un son qui est entendu par l'autre d'abord directement, ensuite après réflexion sur le mur. On demande à quelle distance doivent se trouver les deux observateurs pour que l'intervalle qui sépare les deux perceptions soit supérieur à un dixième de seconde ? La vitesse du son est de 340^m par seconde.

C. — **149**. — Etant données deux sources lumineuses A, B distantes de 4^m, où faut-il placer un écran sur la droite qui les joint de façon qu'il soit également éclairé par ces deux sources ? Leurs intensités sont proportionnelles à 3 et 7, et l'on sait qu'un éclairement est proportionnel à l'intensité de la source et à l'inverse du carré de la distance à cette source.

CHAPITRE IV

ÉQUATIONS ET PROBLÈMES DU SECOND DEGRÉ

A. — 150. — Résoudre l'équation : $7x^2 - 6x - 8 = 0$.

A. — 151. — Ecrire que les deux équations du second degré : $ax^2 + bx + c = 0$; $a'x^2 + b'x + c' = 0$ ont deux racines communes.

C. — 152. — Ecrire que les deux équations du second degré : $ax^2 + bx + c = 0$; $a'x^2 + b'x + c' = 0$ ont une seule racine commune.

B. — 153. — Résoudre l'équation : $\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} = 0$.

C. — 154. — α, β étant les deux racines de l'équation $\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} = 0$, calculer : $\alpha + \beta$; $\alpha^2 + \beta^2$; $\alpha^3 + \beta^3$; $\alpha^4 + \beta^4$ et $\alpha^5 + \beta^5$.

A. — 155. — Classer les nombres -6, 2, 8 par rapport aux racines de l'équation : $x^2 - 4x + 3 = 0$.

C. — 156. — Si a, b, c sont les côtés d'un triangle, montrer que $a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2$ est négatif.

A. — 157. — Un triangle peut-il avoir comme côtés a et les racines de l'équation du second degré : $x^2 - px + q = 0$?

A. — 158. — Résoudre les deux équations :

$$x^4 - 4x^2 - 9 = 0 \qquad x^4 - 4x^2 + 1 = 0$$

A. — 159. — Classer les nombres 3 ; -6 ; $0,2$ par rapport aux racines de chacune des équations : $x^4 - 4x^2 - 9 = 0$ et $x^4 - 4x^2 + 1 = 0$.

B. — 160. — Résoudre : $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$, en prenant comme inconnue auxiliaire : $y = x + \frac{1}{x}$. Discuter suivant les valeurs de a et b.

A. — 161. — Résoudre le système : $\begin{cases} x - y = -1 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{12} \end{cases}$

B. — 162. — Résoudre le système : $\begin{cases} yz = a \\ zx = b \\ xy = c \end{cases}$

C. — 163. — Résoudre le système : $\begin{cases} x^2 = ax + by \\ y^2 = ay + bx \end{cases}$

B. — 164. — Les côtés d'un triangle étant a, b, c, les augmenter ou les diminuer tous d'une même quantité de façon à former ainsi les côtés d'un triangle rectangle.

C. — 165. — Couper un trièdre trirectangle donné par un plan de façon à former un triangle égal à un triangle donné.

C. — 166. — Tout triangle ABC peut-il être considéré comme la projection, sur son plan, d'un triangle équilatéral ?

C. — 167. — Couper un prisme à base carrée suivant un parallélogramme dont les côtés aient des longueurs données.

B. — 168. — Où faut-il placer une lentille de « numéro » 4 entre deux points A et B distants de 2^m, pour que l'image de A se fasse en B ? (Voir les n^{os} **116** et **117**).

B. — 169. — Une route part d'un point A et tourne à angle droit au bout de 2^{km}. A quelle distance de A sur cette route doit se trouver un point B pour que le chemin de A à B soit k fois plus long que la distance à vol d'oiseau de A à B ?

B. — 170. — Un oiseau qui fait 15^m par seconde passe à 30^m au-dessus de la tête d'un chasseur. Quel est l'endroit que doit viser le chasseur si l'on suppose que les grains de plomb font en moyenne 180^m par seconde ?

C. — 171. — Dans un tube barométrique de 3^{cm^2} de section et dont la longueur au-dessus de la cuve à mercure est de 900^{mm}, on introduit 1^{cm^2} d'air pris à la pression extérieure 750^{mm}. Quelle est la dénivellation de la colonne mercurielle ? Quelle doit être la nouvelle graduation du baromètre ? On suppose que l'air suit la loi de Mariotte. (Voir n° **218**).

C. — 172. — Un tube de 1^{cm^2} de section et de 1^m de long est plongé verticalement dans l'eau d'une cuve, l'ouverture supérieure étant bouchée par le doigt. A quelle hauteur monte l'eau dans ce tube, si l'extrémité supérieure est à 50^{cm} au-dessus du niveau de l'eau. La pression atmosphérique est supposée équivalente à la pression d'une colonne d'eau de 10^m de hauteur.

C. — **173.** — Dans l'expérience précédente (exercice n° **172**), on soulève le doigt puis on le repose, et enfin on soulève le tube. Quelle est la hauteur d'eau que contient ce tube, au moment où il va sortir de l'eau ?

B. — **174.** — Deux trains vont de Paris à Orléans. L'un d'eux, qui met 55 minutes de moins que l'autre pour faire ce trajet de 125^{km}, fait 36^{km} de plus à l'heure. Quelles sont les durées des deux trajets ?

CHAPITRE V

PROGRESSIONS ET LOGARITHMES

A. — **175.** — On définit une progression arithmétique par son premier terme 4,2 et sa raison 3,2. Quelle est la somme des 100 premiers termes ?

A. — **176.** — Quelle est la somme des 100 premiers termes d'une progression arithmétique de premier terme 4,2 et de raison — 3,2 ?

A. — **177.** — On considère deux progressions de premier terme 4,2 et de raisons respectives + 3,2 et — 3,2. Insérer entre les termes de chacune de ces progressions 7 moyens arithmétiques.

C. — **178.** — On donne la somme s et le produit p de trois termes consécutifs d'une progression arithmétique, Peut-on trouver ces termes ?

C. — **179.** — Trouver 4 termes consécutifs d'une progression arithmétique connaissant leur somme s et leur produit p. Traiter la même question pour 5 termes.

B. — **180.** — On considère la progression géométrique dont le premier terme est 2,8 et la raison 0,8. Quel est le 15e terme ? Quelle est la somme de ces termes ? Que devient cette somme si le nombre des termes considérés augmente indéfiniment ? Que devient-elle si l'on prend seulement les termes de deux en deux ?

A. — **181.** — Insérer 3 moyens entre deux termes consécutifs de la progression géométrique de premier terme 2,8 et de raison 0,8.

C. — 182. — **Quelle est la formule donnant le produit de n termes consécutifs d'une progression géométrique dont on donne le premier terme a et la raison r ?**

A. — 183. — Montrer que, si dans un triangle les trois angles sont en progression arithmétique, l'un d'eux vaut 60°.

B. — 184. — Montrer que la formule : $\log a^n = n \log a$ s'applique encore au cas où n est un exposant négatif.

A. — 185. — Quelles sont les caractéristiques des logarithmes du produit de 475,38 par 1 000 000 et du quotient de ce même nombre par 100 000 000 ?

A. — 186. — Calculer les logarithmes de $\sqrt[25]{2^{12}}$ et de $\sqrt[10]{3^3}$ et en déduire l'ordre de grandeur de ces nombres.

A. — 187. — Calculer à l'aide des logarithmes :

$$\frac{\sqrt[7]{4{,}27} - 0{,}328^6}{2{,}573\left[\sqrt[7]{4{,}5} - \sqrt[3]{32{,}3}\right]}.$$

B. — 188. — En désignant par n un nombre entier compris entre 100 et 1 000, on a, de façon très approximative, la relation : $\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{0{,}4343}{n}$. On admettra cette égalité et l'on en déduira que la différence tabulaire entre les logarithmes de $n + 1$ et n, tels qu'ils sont donnés aux pages 476 à 479, est sensiblement égale au quotient de 4343 par n.

A. — 189. — Que devient un capital de 1 534^{fr} placé à intérêts composés, au taux de 2,5 pour cent, pendant 26 ans ?

C. — 190. — Une horloge sonne, en plus de l'heure, un coup au quart, deux coups à la demie, trois coups aux trois quarts et quatre coups à l'heure. Elle est remontée le 1er et le 16 de chaque mois. Combien de coups au moins doit-elle pouvoir sonner sans que la sonnerie soit remontée ?

B. — 191. — Des ressorts de wagons sont formés de 8 lames superposées dont les longueurs décroissent régulièrement de 200^{cm} à 60^{cm}. Quelle est la longueur totale des 8 lames ?

B. — 192. — Un commis gagne 1 500^{fr} pendant chacune des 4 premières années, puis 1 600^{fr} pendant chacune des 4 années suivantes et ainsi de suite, chaque augmentation étant de 100^{fr}. Un second commis gagne 1 500^{fr} la première année,

1525[fr.] la seconde et ainsi de suite, l'augmentation annuelle étant de 25[fr] Comparer leurs traitements. Quelle devrait être l'augmentation du premier pour que le total des gains soit le même au bout de 20 ans ?

B. — 193. — Un décamètre à ruban est supposé formé d'un axe central de 1[cm] de circonférence, axe sur lequel se trouvent enroulés 110 spires de ruban. Quelle est la différence, supposée constante, de longueur de deux spires consécutives et quel est le diamètre total du décamètre une fois le ruban enroulé ? On supposera que les longueurs de deux spires consécutives sont sensiblement égales à celles de deux circonférences dont les rayons diffèrent entre eux de l'épaisseur du ruban.

B. — 194. — Un jardinier a 50 rosiers en ligne droite distants de 1[m] les uns des autres. Quel est le chemin total qu'il doit faire pour les arroser, sachant qu'il prend l'eau au milieu de la rangée de rosiers et qu'à chaque voyage il peut arroser deux plants ?

B. — 195. — Une personne voit ses charges s'accroître d'un dixième, d'une année à l'autre. Au bout de combien de temps dépensera-t-elle deux fois plus si cette augmentation a toujours lieu dans les mêmes conditions ?

B. — 196. — Une personne voit ses économies diminuer d'un douzième, d'une année à l'autre. Combien a-t-elle versé la première année sachant qu'elle a mis 3000[fr] de côté au bout de dix ans ?

B. — 197. — Dans une machine pneumatique, la pression après chaque coup de piston est le produit de la pression après le coup précédent par un nombre constant que l'on supposera égal à 0,9. Si la pression initiale est celle de 750[mm] de mercure, au bout de combien de coups de piston sera-t-elle de 2[cm] ? Quelle sera-t-elle au bout de 30 coups de piston ?

C. — 198. — De 1800 à 1900, la population totale de la France a passé approximativement de 30 millions à 40 millions d'habitants. Si cet accroissement s'était produit de façon régulière, quel aurait été, pour 10000 habitants, l'excédent annuel des naissances sur les décès ?

CHAPITRE VI

FONCTIONS ET DÉRIVÉES

B. — 199. — D'après la Caisse des retraites pour la vieillesse, les nombres de survivants d'un groupe de 100 000 personnes, sont suivant l'âge donné en années :

Age	20	25	30	35	40	45	50
Survivants	92 423	88 918	85 777	82 701	79 495	75 894	71 629

Représenter ces résultats par un graphique, et « interpoler » pour les âges de : 21 ans, 22 ans,... 49 ans, c'est-à-dire donner approximativement le nombre des survivants à ces âges.

B. — 200. — En s'aidant d'une représentation graphique, on donnera la température moyenne au parc Saint-Maur de quinzaine en quinzaine, sachant que pour le 1[er] de chaque mois on a les températures suivantes :

Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin
2°,1	2°,5	4°,5	7°,7	11°,5	15°,2
Juillet	**Août**	**Septembre**	**Octobre**	**Novembre**	**Décembre**
17°,7	18°,3	16°,3	12°,3	7°,4	3°,7

B. — 201. — En se servant d'une représentation graphique, on cherchera le temps mis par la lumière pour venir du Soleil à la Terre, pour chaque quinzaine, sachant qu'au 1[er] de chaque mois, ces temps sont donnés par le tableau suivant :

Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin
8^{m}10^s	8^{m}11^s	8^{m}14^s	8^{m}18^s	8^{m}22^s	8^{m}25^s
Juillet	**Août**	**Septembre**	**Octobre**	**Novembre**	**Décembre**
8^{m}27^s	8^{m}26^s	8^{m}22^s	8^{m}19^s	8^{m}15^s	8^{m}11^s

A. — 202. — Il résulte de statistiques que le nombre des personnes de Grande-Bretagne et d'Irlande ayant des revenus annuels supérieurs à 5 000^{fr}, 7 500^{fr},... 25 000^{fr} sont données par le tableau suivant :

Revenus supérieurs à :	5 000	7 500	10 000	12 500
Nombres de personnes :	243 550	126 588	76 725	56 317

15 000	17 500	20 000	22 500	25 000	. . . .
43 500	35 373	30 251	25 804	23 850	. . . .

Calculer approximativement, d'après ce tableau, combien il y a de personnes ayant plus de 7 500fr de revenus dans un groupe de 1 000 personnes ayant plus de 5 000fr de revenus ; de même, combien de personnes ont plus de 10000fr dans un groupe ayant plus de 7 500fr, etc... Représenter par un graphique les résultats obtenus.

A. — 203. — Les frais d'envoi d'argent, par mandat-carte ou mandat-lettre, sont les suivants : une taxe fixe de 0fr,10 plus :

0f,05 par	5f,	jusqu'à	20f	0f,75 de	100f,01	jusqu'à	300f
0f,25 de	20f,01	»	50f	1f,00 »	300f,01	»	500f
0f,50 »	50f,01	»	100f	1f,25 »	500f,01	»	1 000f

Au-dessus on ajoute 0f25 par 500f ou fraction de 500f. Tracer le graphique des frais d'envoi nécessités par chaque franc de la somme envoyée, suivant l'importance de cette somme.

B. — 204. — En reprenant l'énoncé de l'exercice n° **133**, tracer le graphique du nombre des sièges attribués au parti A suivant le nombre des suffrages qu'il a réunis.

B. — 205. — Traduire par des graphiques les résultats de l'exercice n° **122** de façon à savoir chaque année quelles sont les sommes qui doivent être versées pour chaque enfant.

B. — 206. — En traduisant par un graphique les hypothèses de l'exercice n° **192**, peut-on interpréter les résultats, à l'aide d'aires de rectangles ?

C. — 207. — Etudier à l'aide d'un graphique les variations de l'angle des deux aiguilles dans une horloge.

B. — 208. — Si, dans le plan de deux axes de coordonnées, on trace une droite, des points équidistants pris sur cette droite ont des ordonnées qui sont les termes consécutifs d'une progression arithmétique.

C. — 209. — Les droites passant par les points A, B, de coordonnées A(0,0) et B(2,3) d'une part ; et par les points A et C(— 3,2), d'autre part, sont rectangulaires. Peut-on généraliser cette propriété ?

C. — 210. — Reconnaître la forme du quadrilatère dont les sommets A, B, C, D ont respectivement pour coordonnées A(0,0) ; B(6,2) ; C(5,5) ; D(— 1,3).

C. — 211. — Quelle est l'aire du quadrilatère de l'exercice précédent (voir nº **210**) ?

C. — 212. — Quelle est la pente de chacun des côtés de ce même quadrilatère ? Quel est son périmètre ? (voir nº **210**).

C. — 213. — On traitera les problèmes analogues à ceux des exercices nºs **210, 211** et **212** pour les trois quadrilatères définis par les coordonnées de leurs sommets :

A (0,0)	A (0,0)	A (0,0)
B (3,1)	B (8,2)	B (8,2)
C (2,4)	C (3,5)	C (4,5)
D (— 1,3)	D (— 1,4)	D (0.5)

B. — 214. — Les 6 points ABCDEF dont les coordonnées sont respectivement : A(— 1,1) ; B(1, — 1) ; C(5,0) ; D(8,0) ; E(0,4) ; F(0,9) étant placés, on les joint deux à deux. Montrer que les diverses droites ainsi tracées font, soit avec Ox, soit avec Oy, des angles aigus dont les tangentes comprennent en particulier les dix premiers nombres entiers et leurs inverses.

C. — 215. — On prend le carré ABCD dont les sommets ont pour coordonnées : A (6,6) ; B(6, — 6) ; C(— 6, — 6) ; D(— 6,6). On joint l'origine O au milieu K de AD ; on la joint ensuite au point B par un contour polygonal OMNB dont les sommets ont pour coordonnées : M(2, — 2) ; N(3,0) ; enfin on joint le point O au point T(— 3, — 6) de CD par un contour OPQT de sommets P(— 2,2) ; Q(— 4, — 2). Montrer que le carré est ainsi décomposé en trois aires équivalentes.

C. — 216. — Construire la courbe $y = x^3 - 4x + 1$. On cherchera les points où la tangente est parallèle à l'axe Ox.

C. — 217. — On prendra la formule des lentilles $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$ (exercice nº **116**), et, en portant les valeurs de p en abscisses et celles de p' en ordonnées, on construira la courbe représentée par cette équation. On montrera que c'est une hyperbole équilatère.

A. — 218. — La loi de Mariotte, d'après laquelle le produit de la pression p d'un gaz par son volume v est constant, à une même température, peut s'écrire $p.v = C$, en désignant par C une quantité fixe. On construira la courbe ainsi obtenue, en

supposant qu'il s'agisse de $1^{m^3},30$ d'air pris sous la pression normale de 760^{mm} de mercure.

A. — **219**. — Montrer que la loi de Mariotte (voir exercice n° **218**) peut encore s'énoncer : la densité d'un gaz est proportionnelle à sa pression. Quel serait alors le graphique correspondant à ces nouvelles coordonnées : densité et pression ?

B. — **220**. — Construire le graphique qui traduit la loi de Mariotte (voir exercice n° **218**) en prenant pour abscisses les logarithmes de p et pour ordonnées les logarithmes de v.

C. — **221**. — Montrer que la courbe $x^2 = ax + by$ est une parabole. On désigne par a et b deux nombres supposés connus.

A. — **222**. — Résoudre graphiquement le système :

$$\begin{cases} x^2 = 3x + 6y \\ y^2 = 3y + 6x \end{cases}.$$

A. — **223**. — Reprendre à l'aide de graphiques les équations ou systèmes d'équations donnés dans les exercices n°s **134**, **138**.

A. — **224**. — Reprendre à l'aide de graphiques les problèmes du second degré donnés dans les exercices n°s **150**, **155**.

A. — **225**. — Reprendre à l'aide de graphiques la résolution des équations bicarrées de l'exercice n° **159** en posant $y = x^2$.

B. — **226**. — Reprendre les résultats de discussion de l'exercice n° **160**, en considérant les deux paramètres a et b comme représentant les coordonnées d'un point du plan.

B. — **227**. — Résoudre et discuter : $a \cos \alpha + b \sin \alpha = c$ équation dans laquelle l'angle α est l'inconnue. On remarquera pour cela que le point de coordonnées : $\cos \alpha$, $\sin \alpha$ est à une distance constante de l'origine.

C. — **228**. — Calculer les dérivées, par rapport à x, des fonctions : $y = \sqrt{x}$ et $y = \sqrt{R^2 - x^2}$.

C. — **229**. — Quel est le plus grand volume que peut avoir un réservoir cylindrique d'axe vertical placé sous une voûte demi-cylindrique en forme de tunnel à axe horizontal de $2^m,50$ de rayon ?

C. — **230**. — Quelle est l'aire la plus grande que puisse avoir un triangle isocèle inscrit dans un cercle de rayon donné ?

TRIGONOMÉTRIE

—

A. — **231**, — Convertir en radians les angles suivants : — 673°; $453^{\gamma},256$; 53° 474′56″; $0^{\gamma},6325$. Convertir en degrés et en grades les angles suivants donnés en radians : 2,7 ; — 53,28.

A. — **232**. — Calculer les lignes trigonométriques des angles : — 584°; — 4123^{γ}.

A. — **233**. — Indiquer, en se servant des tables des pages 486, 487, avec quelle approximation on peut, suivant les valeurs de l'angle α, supposé donné en radians, remplacer dans un calcul sin α ou tg α par α, et cos α par $1 - \frac{\alpha^2}{2}$.

A. — **234**. — On veut construire un rapporteur rectanlaire de dimensions $10^{cm} \times 5^{cm}$, le centre du rapporteur étant au milieu d'un des plus longs côtés. Donner la graduation des divers côtés du rectangle, en supposant que l'on veuille représenter tous les angles de 2^{γ} en 2^{γ}.

A. — **235**. — Dresser la table numérique donnant les longueurs des cordes qui sous-tendent les angles de 10^{γ}, 20^{γ}, 30^{γ}, ... 90^{γ}, 100^{γ}.

A. — **236**. — Exprimer en fonction des lignes de l'arc x : $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$; $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$; $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.

A. — **237**. — Etablir l'identité $\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$.

B. — **238**. — Calculer sin $3x$, cos $3x$ et tg $3x$ en fonction des lignes de l'arc x.

C. — **239**. — Calculer sans l'aide des tables les lignes trigonométriques des arcs $\frac{\pi}{8}$ et $\frac{\pi}{12}$.

C. — **240**. — Simplifier : $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x$ et : $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x$.

C. — **241**. — Etudier les variations de : $y = \sin x + \cos x$.

C. — **242**. — L'angle α étant inconnu, résoudre l'équation : $a \cos \alpha + b \sin \alpha = c$.

C. — **243**. — Démontrer que dans tout triangle on a la relation $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \,.\, \operatorname{tg} B \,.\, \operatorname{tg} C$.

B. — **244**. — Démontrer que, dans tout triangle, on a la relation $a = b \,.\, \cos C + c \,.\, \cos B$.

A. — **245**. — Résoudre un triangle isocèle connaissant un côté égal à $5^m,20$ et un angle égal à $27^{\gamma},675$. On examinera les divers cas qui peuvent se produire.

A. — **246**. — Résoudre un triangle ABC, sachant que ses angles sont en progression arithmétique, B étant l'angle moyen et connaissant les longueurs des deux côtés : $AB = 7^m,60$; $AC = 7^m$.

B. — **247**. — Etant donnés, dans un triangle isocèle, les trois côtés a, b, b, calculer en fonction de ces côtés les rayons des cercles inscrits, ex-inscrits, circonscrits et la surface du triangle.

C. — **248**. — On donne un point A sur un cercle de centre O et de rayon 3^m et un point A′ sur un cercle de centre O′ et de rayon $4^m,50$. L'angle AOO′ est égal à 36^{γ} ; l'angle A′O′O est de 18^{γ}. Enfin la distance des centres O et O′ est $0^m,50$. On demande de calculer la distance des points A et B. Refaire ce calcul en supposant que la distance des centres soit de 8^m.

B. — **249**. — Calculer le rayon R d'un cercle, connaissant la longueur $2l$ de la corde qui sous-tend un arc 2α et la flèche f de cet arc, c'est-à-dire la distance du milieu de l'arc au milieu de la corde. Quelle est la courbe que l'on obtiendrait en considérant f comme fonction de l et en représentant graphiquement les variations de cette fonction, R étant constant ? Quelle serait la courbe donnant de R en fonction de l, si f est constant ?

B. — **250**. — Un câble est tendu entre deux poteaux distants de 60^m. On suppose que la courbe dessinée par ce câble est approximativement un arc de cercle de flèche 1^m. Quelle est la longueur de ce câble ?

B. — **251**. — On donne une « lentille sphérique » formée de la portion commune à deux sphères de même rayon. Son épaisseur est 2^{cm}. Le rayon du cercle qui la limite est 5^{cm}. Quelle

est la surface totale de cette lentille ? Quel est l'angle des plans tangents aux deux sphères en un point de leur intersection ?

B. — 252. — On porte sur une circonférence des arcs égaux AB, BC, CD, DE, ... dont les cordes sont égales au demi-rayon. Au bout de combien de fois trouvera-t-on ainsi un point M du cercle tel que AM soit inférieur à un dixième du rayon ?

B. — 253. — Les verres de montre sont en général des calottes sphériques. Le diamètre de l'un d'eux étant 4^{cm}, quelle sera la flèche de la calotte ainsi formée et combien pourra-t-on découper de ces verres dans une zone sphérique de 1^m de rayon, de 4^{cm} de hauteur, ayant comme plan de symétrie le plan de l'équateur.

B. — 254. — La loi qui lie « l'angle d'incidence » i à « l'angle de réfraction » r est, comme l'on sait, $\sin i = n \sin r$. On prend sur un cercle de centre O, de rayon 1, deux points A, B tels que l'angle AOB soit égal à « l'angle de déviation » : $i - r$; si C est un point de OA tel que $OC = n$, montrer que les angles du triangle BOC sont : $i - r$, r et $\pi - i$. En déduire la construction de l'un des angles i ou r quand on connaît l'autre et l'indice n.

B. — 255. — Un bassin circulaire est vu d'un point A sous un angle de 24^{γ}. On se rapproche de son centre de 20^m et l'angle sous lequel on le voit a doublé. Quel est le rayon du bassin ?

A. — 256. — Un pont-levis de 4^m de longueur peut se relever à l'aide de chaînes passant sur des poulies de renvoi situées à 4^m au-dessus de la charnière du pont. Quelles sont les longueurs de ces chaînes, supposées limitées aux poulies, si le pont-levis doit faire 20^{γ}, 40^{γ} ou 60^{γ} avec la verticale ?

A. — 257. — En supposant que les deux aiguilles d'une horloge aient la même longueur : $0^m,50$, quelle est la distance de leurs extrémités à midi et demie et à midi trois quarts ?

A. — 258. — Un mât est attaché au tiers de sa hauteur par trois cordes d'égale longueur : 4^m qui forment des angles de 40^{γ} avec le sol. Quelle est la hauteur de ce mât ?

B. — 259. — Une ville A est à vol d'oiseau à 25^{km} d'un point O et au nord-nord-ouest de ce point ; une seconde ville B est à

25^{km} de O et à l'est-nord-est. Quelle est la distance et quelle est la position de B par rapport à A sur la « rose des vents » ?

A. — **260**. — On veut retenir un couvercle de malle avec un cordon de 30^{cm} attaché sur le couvercle à 15^{cm} de la charnière. A quelle distance doit-on le fixer sur la malle si l'on veut que l'angle du couvercle avec la malle soit de 150^{γ} ?

A. — **261**. — Un couvercle de malle est retenu par un cordon de 30^{cm} fixé à 15^{cm} de la charnière sur le couvercle et à 20^{cm} sur la malle. Quel est l'angle du couvercle avec la malle ?

C. — **262**. — Trois points A, B, C, sommets d'un triangle équilatéral de 50^{km} de côté sont reliés deux à deux par trois routes. Deux cyclistes partent simultanément de A et B, vers C, avec des vitesses respectives de 18^{km} et 25^{km} à l'heure. A quel instant seront-ils en deux points M et N, tels que leur distance à vol d'oiseau soit 30^{km} ? A quel instant seront-ils en deux points P et Q, tels que la distance de P à Q soit la même en passant par A et B ou en passant par C ?

B. — **263**. — Un aéroplane passe dans le plan vertical de deux points A et B distants de 500^{m}, points où des observateurs mesurent les angles que font à cet instant avec la verticale les rayons visuels allant à l'aéroplane. Quelle est sa hauteur si ces angles sont 15^{γ} et 25^{γ} ?

C. — **264**. — Chacun des deux appareils de visée est formé dans l'expérience précédente (n° **263**) d'une règle horizontale graduée en centimètres et dont le zéro est à 10^{cm} au-dessus de l'œil de l'observateur, qui lit la division correspondant au passage de l'aéroplane. Montrer que seule la somme des nombres lus sur les deux appareils intervient dans la mesure de la hauteur.

C. — **265**. — En supposant, pour simplifier, que les pieds d'un homme soient représentés par deux segments de droite de longueur 25^{cm}, on étudiera les variations de l'aire du trapèze qu'ils limitent, suivant que les pieds forment un angle plus ou moins grand, l'écartement des talons restant constamment égal à 10^{cm}.

C. — **266**. — Quelle est la longueur du parallèle de la sphère terrestre qui passe à Paris par la flèche du Panthéon, point de latitude $48°50'49''$. Quelle serait l'erreur commise sur cette longueur pour une erreur de $1'$ dans la latitude ?

C. — 267. — On considère un parallélépipède rectangle et l'on désigne par α, β, γ les angles de la diagonale issue d'un sommet avec les trois arêtes qui en partent. Démontrer que l'on a la relation : $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

C. — 268. — Si dans un trièdre, on désigne par a, b, c les angles des faces et par A, B, C ceux des dièdres opposés, démontrer que l'on a : $\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$.

C. — 269. — Deux murs rectangulaires de 9^m de hauteur sont orientés respectivement du sud au nord et de l'est à l'ouest. L'ombre du point commun à leurs crêtes se fait à 4^m à l'est du premier et à 3^m au nord du second. Quel est à ce moment l'angle des rayons solaires avec le sol ?

C. — 270. — Montrer que la projection d'une hélice sur un plan parallèle à son axe peut être une sinussoïde.

GÉOMÉTRIE

CHAPITRE I

DROITES ET PLANS

A. — 271. — Etant donnés 5 points quelconques dans l'espace, combien y a-t-il de plans passant par trois de ces points ? Combien y a-t-il de droites passant par deux de ces points ? Les intersections de ces plans deux à deux font-elles toutes parties de ces droites ? Etudier de façon analogue ce qui se passerait pour les points et les droites communs à 5 plans quelconques de l'espace.

A. — 272. — Si 3 droites se coupent deux à deux, montrer qu'elles forment un triangle, ou un trièdre. Y a-t-il un cas particulier où l'on a ni un triangle, ni un trièdre ?

A. — 273. — Montrer qu'il y a une infinité de droites coupant trois droites données. Y a-t-il des cas d'exceptions ?

A. — **274**. — Prouver que, si deux angles sont adjacents et complémentaires leurs bissectrices font un angle de 50^{γ}.

A. — **275**. — Y a-t il des perpendiculaires à un plan donné coupant deux droites données ?

B. — **276**. — Par les côtés d'un angle droit, peut-on faire passer d'une infinité de façons deux plans rectangulaires ?

B. — **277**. — Couper un trièdre suivant un triangle rectangle par un plan passant par un point donné sur une arête.

B. — **278**. — Un trièdre a trois faces a, b, c et trois trièdres A, B, C. Quelles sont les diverses formes que présente ce trièdre, suivant que 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 de ces angles sont droits ?

C. — **279**. — Quel est le chemin que doit décrire une bille de billard lancée en un point donné A pour passer en un second point donné B après un, deux, trois ... chocs sur les bandes du billard ?

C. — **280**. — Quel chemin décrit un rayon lumineux qui va d'un point A donné dans l'espace à un autre point donné B après une, deux, trois réflexions sur les faces d'un trièdre ?

B. — **281**. — Montrer que si un triangle a deux hauteurs égales, il est isocèle.

A. — **282**. — De combien de façons peut-on découper un triangle quelconque en deux triangles rectangles ?

B. — **283**. — Peut-on toujours découper un triangle quelconque en trois triangles isocèles ?

C. — **284**. — On plie en deux une feuille de papier, qui a l'une de ses faces noircies, de façon à pouvoir découper simultanément dans cette feuille ainsi pliée deux triangles égaux. Montrer que, du moins en général, ces deux triangles ne peuvent pas se superposer, les deux faces noires restant en dessus. Peut-on arriver cependant à ce résultat en découpant de façon convenable l'un de ces triangles ?

C. — **285**. — Montrer que les plans bissecteurs des dièdres d'un trièdre ont trois à trois une droite commune.

C. — **286**. — Montrer que les plans perpendiculaires aux faces d'un trièdre suivant les bissectrices des angles de ces faces ont une droite commune.

C. — **287.** — Si deux triangles ABC, A'B'C', non situés dans un même plan, sont tels que AB et A'B' se coupent, ainsi que BC et B'C', et que CA et C'A', en déduire que les droites AA', BB', CC' ont un point S commun. Peut-on généraliser pour deux polygones ?

B. — **288.** — Quel est le plus court chemin d'un point de l'espace au contour d'un triangle ?

B. — **289.** — On prend deux points A et B, un sur chacune des faces d'un dièdre. Quel est le plus court chemin pour aller de A à B, en restant sur les faces du dièdre ?

B. — **290.** — Quel est le lieu géométrique des points de l'espace équidistants de deux droites qui se coupent ? Quel est le lieu géométrique des points équidistants de trois droites qui se coupent deux à deux ?

A. — **291.** — Quel est le lieu géométrique des points de l'espace d'où l'on voit sous le même angle deux segments égaux portés par une même droite.

A. — **292.** — Peut-on faire passer par deux droites données dans l'espace, deux plans rectangulaires ?

A. — **293.** — Montrer qu'en général il y a une droite et une seule perpendiculaire à deux droites données et les coupant.

B. — **294.** — Etant données deux droites, peut-on faire passer par l'une d'elles un plan qui soit perpendiculaire à l'autre ?

CHAPITRE II

PARALLÈLES

A. — **295.** — Etant donnés deux plans non parallèles P et P', montrer qu'on peut les couper par un même plan suivant deux parallèles Δ et Δ' ? Montrer, en outre, que tout plan passant par Δ recoupe le plan P' suivant une parallèle à Δ'.

B. — **296.** — Une tour carrée porte une horloge sur chacune de ses faces. Pour deux cadrans situés dans des plans parallèles, les aiguilles des minutes peuvent-elles être parallèles ? rectangulaires ? Plus généralement, étudier les variations de l'angle de ces aiguilles.

C. — **297**. — On traitera les mêmes problèmes que dans l'exercice précédent (n° **296**) pour les aiguilles de deux cadrans situés dans des plans rectangulaires.

A. — **298**. — Si une courbe se projette sur deux plans non parallèles suivant une droite, est-ce une droite ?

B. — **299**. — Quel est le lieu géométrique des droites issues d'un point donné situées à une distance donnée d'une droite donnée ?

A. — **300**. — Quel est le lieu géométrique des points dont la somme des distances à deux plans donnés est constante ? Quel est ce lieu si l'on prend la somme des distances a trois plans ?

B. — **301**. — Montrer, qu'après réflexion sur les 3 faces d'un trièdre trirectangle, formé de trois miroirs, un rayon lumineux ressort parallèlement à la direction primitive.

A. — **302**. — On donne, dans un plan, 4 droites D, D', Δ, Δ', telles que Δ fasse un angle de 50° avec D et Δ' un angle de 50° avec D'. L'angle de Δ et Δ' est-il égal à l'angle de D et D' ?

A. — **303**. — Dans un triangle, on suppose connus les trois angles A, B, C. Quels sont les divers angles que font deux à deux les hauteurs et les bissectrices de ce triangle, et quels sont les angles de ces droites avec les côtés ?

B. — **304**. — Montrer qu'il existe deux directions fixes Δ et Δ' telles que les plans faisant des angles égaux avec les deux faces d'un dièdre sont parallèles à Δ ou à Δ'.

B. — **305**. — Mener, dans un plan P, par un point A, une droite Δ faisant l'angle α avec une droite ou un plan donné.

B. — **306**. — Par une droite donnée Δ, faire passer un plan faisant l'angle α avec une droite ou un plan donné.

B. — **307**. — Quel est le lieu géométrique des droites qui, passant par un point donné, font des angles égaux avec les faces d'un angle dièdre donné.

C. — **308**. — ABCD étant un parallélogramme les cotes de A, B et C, au-dessus d'un plan horizontal donné, sont respectivement $3^m,80$, $4^m,50$ et $5^m,10$. Quelle est la cote du sommet D ?

C. — **309**. — Montrer que les milieux des côtés d'un quadrilatère gauche sont les sommets d'un parallélogramme.

A. — 310. — Dans un quadrilatère ABCD on a AB = BC et CD = DA. Montrer que BD et AC sont rectangulaires.

C. — 311. — Peut-on couper un angle polyèdre à quatre faces suivant un parallélogramme ?

A. — 312. — Démontrer que les diagonales d'un trapèze isocèle sont égales et que, réciproquement, si les diagonales d'un trapèze sont égales, il est isocèle.

C. — 313. — Quelles sont les principales propriétés du tétraèdre dont les arêtes opposées sont deux à deux orthogonales ?

C. — 314. — Quelles sont les principales propriétés du tétraèdre dont les arêtes opposées sont deux à deux égales ?

C. — 315. — On joint un point O de l'espace aux sommets d'un rectangle ABCD et l'on porte sur les 4 droites des longueurs égales O*a*, O*b*, O*c*, O*d*, en allant de O vers A, B, C ou D. Quel est le lieu géométrique des points O tels que *abcd* soit un trapèze ? un rectangle ?

A. — 316. — Trouver un plan sur lequel un parallélogramme donné se projette suivant un rectangle.

A. — 317. — Prouver que, dans un rhomboèdre de diagonale AA′, les six sommets, autres que A et A′, sont dans deux plans perpendiculaires à AA′.

A. — 318. — Montrer que si, par une perpendiculaire aux arêtes d'un prisme passent deux plans coupant une de ces arêtes sous le même angle, les sections obtenues sont égales.

C. — 319. — Montrer que, par une section plane d'un prisme, l'on peut faire passer un prisme égal au premier. Ces deux prismes sont-ils superposables ?

C. — 320. — Dans une chambre ayant la forme d'un parallélépipède rectangle, une araignée, se trouvant en un point A d'une des parois, veut attraper une mouche située en un point B sur une autre face. Quel est le chemin le plus court qu'elle pourra suivre sans quitter les murs ? On examinera les divers cas possibles.

CHAPITRE III

CIRCONFÉRENCE ET SPHÈRE

A. — 321. — Quelles sont les diverses positions relatives d'une droite et d'un cercle dans l'espace ?

B. — 322. — Quel est le plus court chemin d'un point de l'espace à un cercle ?

B. — 323. — Trouver une normale à un cercle coupant une droite donnée et faisant l'angle α avec l'axe du cercle.

A. — 324. — Deux cercles étant donnés dans des plans parallèles, trouver une perpendiculaire commune à ces plans qui coupe les deux cercles.

A. — 325. — Montrer que deux plans parallèles découpent sur une même circonférence des arcs égaux.

C. — 326. — Un cercle coupe deux plans parallèles P et P′ en A, B et A′, B′. Montrer que, par A, B et les projections de A′ et B′ sur le plan P, il passe un cercle.

B. — 327. — Quels sont les aspects successifs que peut présenter une éclipse de soleil, suivant que le « diamètre apparent » de la lune est plus grand ou plus petit que celui du soleil ?

C. — 328. — Peut-on tracer une route circulaire équidistante de quatre villages donnés ? Y a-t-il plusieurs solutions ?

C. — 329. — Peut-on tracer une sphère équidistante de cinq points donnés dans l'espace ? Y a-t-il plusieurs solutions ?

B. — 330. — En quel point d'une sphère polie doivent tomber des rayons lumineux de direction donnée pour être réfléchis dans une nouvelle direction donnée ?

A. — 331. — Montrer que si deux cercles sont tangents, ils appartiennent à une même sphère.

A. — 332. — On coupe par un plan fixe des sphères qui ont un cercle commun. Prouver que le lieu géométrique des centres des cercles de section est une droite.

B. — 333. — Quel est, sur la surface d'une sphère, le plus court chemin d'un point à un cercle ?

B. — 334. — Quel est, sur la surface d'une sphère, le plus court chemin permettant de réunir deux cercles donnés ?

A. — **335**. — Quels sont les angles de deux faces latérales consécutives d'une pièce de $0^{f},25$, pièce qui est à 22 pans?

A. — **336**. — Un kiosque a dix pans; quels sont les divers angles sous lesquels on le voit d'un point O situé à la fois dans deux des plans des faces?

B. — **337**. — Quatre points A, B, C, D étant dans un même plan, si l'on voit AB sous le même angle des points C ou D, en est-il de même pour le segment CD vu des points A ou B?

C. — **338**. — Dans un triangle isocèle ABO l'angle au sommet ABO est supposé obtus. On prend sur AB prolongé un point C tel que OC = OB. Démontrer que l'angle de OC avec le prolongement de AO est égal au triple de l'angle OAB. En remplaçant les segments égaux AB, BO, OC par des tiges convenablement articulées, en déduire un « trisecteur », c'est-à-dire un appareil permettant mécaniquement de trouver le tiers d'un angle donné?

A. — **339**. — Montrer qu'un trapèze est inscriptible s'il est isocèle et qu'inversement, tout trapèze isocèle est inscriptible.

C. — **340**. — Si un cercle de rayon R roule sans glisser sur un cercle de rayon 2R en restant à l'intérieur de ce cercle, montrer que tout point du petit cercle décrit une ligne droite.

B. — **341**. — Mener une normale commune à deux cercles qui ont deux points communs?

C. — **342**. — Mener une normale commune à deux cônes.

B. — **343**. — Mener une normale commune à deux cylindres.

C. — **344**, — Quel est le lieu géométrique des droites communes à deux plans rectangulaires qui pivotent autour de deux droites parallèles données?

CHAPITRE IV

RELATIONS MÉTRIQUES

C. — **345**. — Quel est le lieu géométrique des points d'où l'on voit sous le même angle deux segments d'une même droite ayant une extrémité commune?

B. — **346.** — La moyenne arithmétique de deux segments positifs est-elle plus grande que leur moyenne géométrique ?

A. — **347.** — Peut-on découper un triangle rectangle en triangles semblables entre eux et semblables au premier?

A. — **348.** — Quels sont les cas de similitude les plus simples de deux parallélogrammes ? de deux rectangles ?

A. — **349.** — Quelle est la hauteur d'un arbre dont l'ombre mesure $7^{m},20$, sachant qu'une personne de $1^{m},65$ a, au même moment, une ombre de $1^{m},10$?

A. — **350.** — Quelle est la profondeur d'un puits, de rayon intérieur 70^{cm}, étant donné qu'une personne de $1^{m},65$ de haut ne voit le fond que si elle est au moins à 50^{cm} de la margelle ? La hauteur de la margelle est de 45^{cm} au-dessus du sol.

A. — **351.** — Une échelle, posée contre un mur, a 9 échelons. Un homme de $1^{m},65$ a la même hauteur que l'échelon du milieu. A quelle hauteur arrive l'échelle sur le mur ?

C. — **352.** — Pour mesurer la hauteur d'une lampe à arc dans un hall, on constate qu'une canne AB de 95^{cm} de hauteur donne sur le sol une ombre AC de 45^{cm}. On porte la canne au point C et l'on trouve, comme nouvelle longueur de l'ombre sur le sol, 51^{cm}. Quelle est la hauteur de la lampe ? Quelle précision peut-on attendre de cette mesure, si les longueurs ne sont connues qu'à 1^{cm} près ?

A. — **353.** — Un encrier a la forme d'un parallélépipède droit, dont la base est un carré de 5^{cm} de côté, surmonté d'un cylindre, de 2^{cm} de diamètre, de même hauteur 3^{cm} et de même axe que le parallélépipède. Sur quelle longueur une plume pourra-t-elle être mouillée par l'encre si celle-ci a son niveau à 1^{cm} au-dessus du fond ? On supposera que le porte-plume peut être assimilé à une ligne droite.

C. — **354.** — Dans un quadrilatère ABCD, articulé en ses quatre sommets, on a : AB = BC = 2. CD = 2 . DA. Le côté DA étant fixe, montrer que lorsque AB fait un tour complet, DC en fait deux.

A. — **355.** — Une route dont la longueur est de $1^{cm},2$ sur la carte d'Etat-Major a entre ses deux extrémités une différence de niveau de 180^{m}. Quelle est sa longueur réelle ? On sait que

les distances de la carte correspondent à des distances comptées en projection horizontale.

A. — 356. — Le parquet d'une chambre a la forme d'un rectangle dont un angle est enlevé et remplacé par un pan-coupé. Les dimensions de ce pentagone sont, pour deux côtés parallèles : $4^m,80$ et 6^m et pour les deux autres côtés parallèles : $3^m,60$ et $2^m,70$. Quelle est la surface du parquet ?

A. — 357. — Un trapèze rectangle ABCD a comme hauteur $AB = 3^m$ et comme longueurs des côtés parallèles $BC = 4^m$ et $AD = 7^m$. Quel est le point du périmètre qui, avec le sommet A, partage ce périmètre en deux parties d'égale longueur ?

B. — 358. — Sur une tangente à un cercle de rayon 12^{cm}, on porte, à partir du point de contact, une longueur de 16^{cm}. Quelle est la distance du point obtenu à un point de l'axe du cercle situé à 15^{cm} du plan de ce cercle ?

C. — 359. — Montrer que la section d'un trièdre trirectangle par un plan quelconque est un triangle dont le carré de l'aire est égal à la somme des carrés des aires des trois triangles que forme ce plan sur les faces du trièdre.

B. — 360.—Quelle est la distance du sommet A d'un cube, de 1^m de côté, au plan qui contient les trois sommets les plus rapprochés de A ?

B. — 361. — Le polyèdre ayant comme sommets les centres des faces d'un cube est appelé un « octaèdre régulier ». Calculer la diagonale d'un tel polyèdre connaissant son côté.

B. — 362. — Combien faut-il d'étoffe pour faire une tente quadrangulaire à base carrée de 3^m de côté et $3^m,50$ de haut ?

B. — 363. — Combien faut-il d'étoffe pour faire une tente triangulaire de $3^m,50$ de haut et dont la base est un triangle équilatéral équivalent à un carré de 3^m de côté ?

C. — 364. — On prend deux angles de 60° adjacents AOB, BOA' et l'on porte sur OA, OA' et OB des segments $\overline{OP} = p$, $\overline{OP'} = p'$ et $\overline{OF} = f$. Montrer que si P, P' et F sont en ligne droite, on a $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$ (voir exercice n° **116**). En déduire une construction géométrique de p si l'on connaît p' et f.

B. — 365. — Quelle est la surface visible du haut de la

Tour Eiffel, en supposant la Terre sphérique? Si l'on s'élève en aéroplane à 600^{m}, quelle sera la nouvelle surface visible?

C. — 366. — On prend un losange articulé ABCD et l'on fixe aux sommets A et C deux nouvelles tiges égales OA et OC articulées avec les premières dans leur plan. Montrer que, dans toutes les déformations de ce système, les points O, B, D restent en ligne droite et que le produit OB.OD est constant.

C. — 367. — Quel est le lieu géométrique des points dont la distance à un point fixe est égale à la longueur de la tangente issue de ce point à un cercle fixe?

B. — 368. — Deux cercles tracés dans les faces d'un dièdre, et appartenant à une même sphère, ont même puissance pour tous les points de l'arête. La réciproque est-elle exacte?

C. — 369. — Montrer que tous les cercles orthogonaux à deux cercles d'un même plan, extérieurs l'un à l'autre, passent par deux points fixes de ce plan.

C. — 370. — Montrer que, si quatre points A, B, C, D d'un cercle, sont tels que les quatre droites SA, SB, SC, SD issues d'un point S du cercle forment faisceau harmonique, ceci a lieu quel que soit le point S, pris sur le cercle. Etablir en outre que, dans ce cas, chacune des cordes AB, CD passe par le pôle de l'autre par rapport au cercle.

C. — 371. — Etablir que le lieu géométrique du conjugué harmonique d'un point P, par rapport aux points de rencontre avec une sphère d'une sécante variable passant par P, est un plan, appelé le « plan polaire » de P. Inversement, tout plan peut-il être considéré comme « plan polaire » d'un certain point?

C. — 372. — Si deux cercles d'une même sphère se coupent à angle droit, montrer que chacun d'eux est dans le « plan polaire » d'un point convenablement choisi du plan de l'autre. (Voir n° **371**).

B. — 373. — Quelle est la longueur du périmètre d'un polygone régulier de 16 côtés inscrit dans un cercle de rayon R?

CHAPITRE V

LONGUEURS, AIRES ET VOLUMES

B. — 374. — Etant donnés deux axes de coordonnées rectangulaires et un triangle dont un sommet est à l'origine et dont les deux autres sommets ont pour coordonnées a, b et a', b', montrer que le double de l'aire de ce triangle est la différence $ab' - a'b$, prise en valeur absolue.

B. — 375. — Vérifier l'identité $a^2 - b^2 \equiv (a + b)(a - b)$ à l'aide de la notion d'aire.

A. — 376. — L'arpentage d'un champ polygonal a donné, comme coordonnées des sommets : A (0^m, 0^m) B (200^m ; $103^m,20$) C ($315^m,80$; 0^m) D ($312^m,10$; 20^m) E ($283^m,75$; $32^m,70$) F ($110^m,25$; $58^m,60$). Quelle est sa superficie ?

A. — 377. — Une fois qu'on a terminé l'arpentage de l'exercice précédent (n° **376**), on s'aperçoit que la chaîne d'arpenteur est trop longue de 5^{cm}. Quelle est la surface du champ ?

B. — 378. — Un triangle donné se projette suivant un triangle équilatéral. Déduire, des dimensions des deux triangles, l'angle que font les plans de ces triangles ? On reprendra le même problème pour un parallélogramme qui se projette suivant un carré.

B. — 379. — On veut entourer une enceinte rectangulaire de dimensions $8^m \times 5^m$ avec une barrière qui en soit constamment à 1^m de distance. Quel est le périmètre de cette barrière et quelle est l'aire comprise à son intérieur ?

B. — 380. — Traiter le même exercice (n° **379**), en supposant que l'enceinte à entourer soit un triangle de côtés 6^m, 7^m et 8^m.

B. — 381. — Quelle est l'aire du dodécagone régulier inscrit dans un cercle de rayon R ? Quelle est l'aire du pentagone régulier inscrit dans le même cercle ?

B. — 382. — Que pèserait une pièce de $0^{fr},25$ à 22 pans, si l'on remplaçait le polygone de contour par son cercle inscrit.

B. — 383. — Démontrer que le cercle inscrit dans un carré a une aire moitié de celle du cercle circonscrit à ce même carré.

A. — 384. — Montrer que l'aire d'une couronne circulaire est égale à celle d'un cercle qui aurait pour diamètre une corde du cercle extérieur tangente au cercle intérieur.

A. — 385. — Un arbre de 25^{cm} de diamètre a une écorce de 3^{cm} d'épaisseur. Si l'on veut débiter le tronc en planches de 17^{cm} de large et de 1^{cm} d'épaisseur, combien pourra-t-on en avoir ?

B. — 386. — Un mètre carré d'un certain treillis hexagonal, en fil de fer, contient environ 200 hexagones et pèse 500^{gr}. Quel est le poids du mètre de fil de fer, ayant servi à le former, sachant que chaque hexagone a deux côtés parallèles qui sont tressés avec les côtés correspondants des hexagones voisins ?

C. — 387. — Sur une feuille de papier quadrillé en centimètres carrés, on trace un contour convexe Γ, qui contient à son intérieur N carrés, et qui en traverse n. On montrera que l'aire comprise à l'intérieur de Γ et supposée évaluée en centimètres carrés est comprise entre N et $N + n$. On établira en outre que le nombre n est sensiblement égal au double de la somme de la longueur et de la largeur de Γ, longueur et largeur mesurées en centimètres à l'aide du quadrillage.

C. — 388. — Avec quelle approximation aurait-on π, en mesurant par le procédé décrit au n° **387**, l'aire d'un cercle de 10^{cm} de rayon, tracé sur du papier quadrillé en millimètres carrés ?

C. — 389. — Quels sont les résultats que donnerait, pour l'aire d'un cercle de 20^{cm} de diamètre, l'emploi de la formule de Tchébitcheff, ou de celle de Simpson, en supposant, pour cette dernière, que les parallèles aient 2^{cm} d'écart ?

A. — 390. — Un emballeur a deux espèces de caisses de même volume ; les premières sont cubiques ; les autres ont comme dimensions $22^{cm} \times 32^{cm} \times 54^{cm}$. Leurs prix sont proportionnels au poids des planches qui les forment. Quelles sont les caisses dont l'emploi est le plus avantageux ?

C. — 391. — Un crayon hexagonal de $0^{cm},5$ de côté est taillé en pointe triangulaire, de façon que trois arêtes du crayon aient comme longueur 15^{cm}, les trois arêtes intermédiaires ayant 16^{cm}. La partie taillée est ainsi formé de trois losanges identiques. Quel est le volume de ce crayon ?

C. — 392. — Un parallélogramme de côtés 7^{cm} et 9^{cm} est projeté sur le plan horizontal passant par son sommet le plus bas suivant un carré de 5^{cm} de côté. Quel est le volume du prisme compris entre ce parallélogramme et sa projection ?

B. — 393. — On déroule la surface latérale d'un cône suivant un secteur circulaire de 50^{γ} d'ouverture. Quel est l'angle au sommet du cône ?

B. — 394. — Quatre flacons d'eau dentifrice ont comme hauteurs respectives : 80^{mm}, 107^{mm}, 123^{mm} et 180^{mm} et comme prix : $1^{fr},75$; 3^{fr} ; 5^{fr} et 15^{fr}. En supposant les flacons exactement de même forme, on demande quel est celui des quatre dont l'achat est le plus avantageux ?

A. — 395. — Une élévation de terrain a sensiblement, sur la carte d'Etat-Major, la forme d'un cône dont la base est un cercle de 2^{cm} de rayon. La différence de cote de la base et du sommet est de 50^{m}. Quel est environ le volume de terre de cette élévation ?

A. — 396. — Par le laminage, une barre carrée de 8^{cm} de côté est transformée en barre ronde de 7^{cm} de diamètre. De combien s'est-elle allongée par mètre ?

A. — 397. — On veut creuser une citerne cylindrique de 3^{m} de profondeur, devant contenir 15^{m3} d'eau. Si l'épaisseur des parois est 20^{cm}, quel est le volume des terres à enlever ?

C. — 398. — Calculer le volume d'un tronc de cône, en le considérant comme la différence des volumes de deux cônes.

C. — 399. — Calculer le volume d'un segment sphérique compris entre deux plans parallèles, connaissant le rayon de la sphère et les distances du centre de la sphère à ces plans.

A. — 400. — Quel est le volume d'un tonneau dont la hauteur est 72^{cm}, les rapports des diverses dimensions ayant leurs valeurs habituelles ?

B. — 401. — Vérifier que la formule des « trois niveaux » s'applique au tronc de pyramide et au tronc de cône ?

C. — 402. — Vérifier que la formule des « trois niveaux » s'applique à un segment sphérique quelconque ?

CHAPITRE VI

CONSTRUCTIONS GRAPHIQUES

A. — **403**. — Construire trois cercles ayant pour centres les sommets d'un triangle et tangents entre eux deux à deux. Calculer les rayons des cercles en fonction des côtés du triangle.

B. — **404**. — On donne deux villages A et B dont l'un A est au bord d'une rivière supposée rectiligne ; l'autre B est à 6^{km} de A et à 1^{km} du bord de la rivière. Où faut-il placer un pont pour qu'il soit à la même distance des deux villages ?

C. — **405**. — En reprenant les données du n° **404**, où faut-il placer ce pont, pour qu'il soit deux fois plus près de B que de A ?

A. — **406**. — Trouver sur une droite Δ d'un plan P, un point dont la somme, ou la différence, des distances à deux points A et B de ce plan P soit égale à une longueur donnée.

B. — **407**. — Chercher sur une droite Δ d'un plan P, un point d'où l'on voie un segment donné AB de ce plan P sous le plus grand angle possible.

C. — **408**. — Mener, par deux points, un cercle interceptant sur une droite donnée un segment de longueur donnée.

A. — **409**. — Peut-on placer sept cercles égaux de façon que chacun d'eux soit au moins tangent à trois autres ?

C. — **410**. — Construire un triangle connaissant un angle, le côté opposé et la somme des deux autres côtés.

C. — **411**. — On donne un rectangle ABCD et une direction δ dans son plan. Une sécante Δ, parallèle à δ, partage ce rectangle en deux parties. Entre quelles limites doit varier Δ pour, qu'en repliant autour de Δ la plus petite des deux parties du rectangle, elle soit contenue à l'intérieur de la plus grande ?

C. — **412**. — On donne deux droites se coupant en un point O, supposé hors des limites du dessin. Tracer, par un point A, une droite qui, prolongée, passerait en O. Construire la bissectrice intérieure de l'angle de ces deux droites.

B. — **413**. — Construire les longueurs $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, l'unité de longueur étant donnée.

B. — **414**. — *a* et *b* étant des longueurs connues, construire $\frac{a^2}{b}$; $\frac{a^3}{b^2}$; $\frac{a^4}{b^3}$, etc...

B. — **415**. — Reprendre par des constructions graphiques les énoncés des exercices nos **349**, **350**, **353** et **357**.

B. — **416**. — Construire un octogone régulier connaissant la distance de deux côtés parallèles. Traiter la même question par le calcul.

C. — **417**. — Du pont d'un bateau, on voit sous un angle droit deux phares situés à 4^{km} et 3^{km}. Au bout d'une demi-heure, on les voit sous l'angle de 120°, puis au bout d'une heure sous l'angle de 135°. Peut-on construire la route suivie par le bateau, en supposant son mouvement rectiligne et uniforme ?

B. — **418**. — La construction approchée d'un polygone régulier de *n* côtés inscrit dans un cercle peut se faire comme il suit. On construit un triangle équilatéral AOB dont un côté AB est un diamètre du cercle. On partage AB en *n* parties égales par les points A, C, D, ... B. La droite OD prolongée coupe le cercle en M, tel que AM est approximativement le côté du polygone. Pour quelles valeurs simples de *n* cette construction est-elle rigoureuse ?

C. — **419**. — On donne un triangle ABC dont l'angle A est obtus ; construire un cercle tel que chaque sommet du triangle admette comme polaire par rapport à ce cercle le côté opposé.

B. — **420**. — Construire, dans un plan, un cercle orthogonal à deux cercles donnés et passant par un point donné.

B. — **421**. — Partager un triangle en 2, 3, 4, ... parties équivalentes par des parallèles à un côté.

A. — **422**. — Partager un triangle en 2, 3, 4, ... parties équivalentes par des sécantes issues d'un même sommet.

B. — **423**. — Construire un triangle équilatéral équivalent à un octogone régulier donné.

C. — **424**. — Partager un trapèze en deux parties équivalentes par une parallèle aux bases. Le partager en deux parties équivalentes par une sécante issue d'un point donné du périmètre.

A. — **425**. — Construire une couronne circulaire équivalente à un cercle donné connaissant, soit son épaisseur, soit le

rayon de son cercle extérieur, soit le rayon de son cercle intérieur. (Voir n° 384).

B. — 426. — Construire une couronne circulaire connaissant le rayon de son cercle moyen et son épaisseur, ou son aire.

CHAPITRE VII

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

A. — 427. — Construire en géométrie descriptive, ou cotée, le point commun à trois plans, donnés chacun par deux droites.

A. — 428. — Construire en géométrie descriptive, ou cotée, l'intersection d'une droite avec un plan donné par trois points.

A. — 429. — Construire en géométrie descriptive, ou cotée, la perpendiculaire commune à deux droites dont les projections horizontales sont parallèles.

B. — 430.— Etant donné, en géométrie cotée, un angle polyèdre à quatre faces, trouver un plan le coupant suivant un parallélogramme.

A. — 431. — Reprendre par la géométrie descriptive l'exercice n° **277**. Le triangle est-il bien déterminé ?

B. — 432. — Construire un plan faisant des angles de 50ᴳ avec deux droites horizontales, données par leurs projections.

A. — 433. — Construire, en géométrie descriptive, le centre d'un cercle passant par trois points donnés dans l'espace.

A. — 434. — Construire, en géométrie descriptive, le centre d'une sphère passant par quatre points donnés dans l'espace.

B. — 435. — Construire, en géométrie cotée, le cercle commun à deux sphères dont les centres sont dans le plan horizontal. Si l'on donne une troisième sphère de centre quelconque, chercher les points communs à ces trois sphères.

B. — 436. — Construire, en géométrie descriptive, le lieu géométrique des droites issues d'un point donné et situées à une distance donnée d'une horizontale donnée.

A. — 437. — On donne, en géométrie descriptive, une droite de bout. Représenter par ses projections un cône admettant cette droite comme axe et limité au plan horizontal.

A. — 438. — Représenter, par ses projections, un cylindre, d'axe de bout et limité à deux plans horizontaux.

A. — 439. — Construire la normale commune à deux cylindres dont les axes sont horizontaux. Construire cette même normale si l'un des axes est horizontal et l'autre vertical.

B. — 440. — Représenter, par ses deux projections, un cube dont une diagonale est verticale.

C. — 441. — Un cube, ayant une diagonale verticale et une de ses arêtes de front, on montrera qu'il est possible de le percer de façon à faire passer par le trou ainsi formé un cube, de mêmes dimensions, ayant une arête verticale. On représentera l'entaille ainsi faite et l'on donnera en outre la vraie grandeur de ce qui reste pour chacune des faces du cube entaillé.

C. — 442. — Une auge de 15^{cm} de hauteur et dont la base est un carré ABCD de 45^{cm} de côté est posée sur un sol horizontal de façon que les cotes au-dessus du sol des sommets A, B, C soient respectivement 0^{cm}, 4^{cm} et 8^{cm}. Représenter, en géométrie cotée, cette auge supposée pleine d'eau. On cherchera quel est le volume de l'eau qu'elle contient.

C. — 443. — Une échelle de 3^{m} de long et de 50^{cm} de large est appuyée contre un mur vertical et fait un angle de 75^{γ} avec le sol. Elle comporte 9 échelons situés à 30^{cm} les uns des autres. Représenter cette échelle par ses projections sur le sol et sur le mur. Quelles sont les ombres portées par l'échelle, si l'on suppose que les rayons solaires fassent 50^{γ} avec le sol et 50^{γ} avec le mur?

C. — 444. — Un mur vertical est percé d'une fenêtre carrée de 40^{cm} de côté, découpée en 16 carrés par des barreaux. Quelle est l'ombre de ce mur sur le sol, si les rayons solaires font avec le mur et avec le sol le même angle de 50^{γ}?

C. — 445. — Un escalier, dont on supposera les marches indéfinies dans le sens horizontal, à 8 marches de 18^{cm} de hauteur et de 35^{cm} de largeur. Dessiner, en géométrie cotée, les ombres portées par les marches les unes sur les autres, la lumière venant d'un point situé à $1^{m},65$ au-dessus de l'arête de la marche supérieure.

B. — **446**. — Représenter, par ses projections, une règle de $1^m,50$ de long placée dans un cube de 1^m de côté reposant sur le sol horizontal ; on supposera que la règle, assimilable à une ligne droite, est dans un plan diagonal vertical.

C. — **447**. — Refaire l'épure du n° **446**, en supposant que la règle soit plate, ait 10^{cm} de largeur, mais ait une épaisseur négligeable. Reprendre cette question par le calcul.

C. — **448**. — Une lanterne, en forme de parallélépipède droit, a une base carrée de 12^{cm} de côté et 24^{cm} de hauteur. Elle porte, sur une de ses faces, une plaque de verre garantie des chocs par un grillage formant 18 carreaux, ayant chacun 4^{cm} de côté. Représenter, en géométrie côtée, cette lanterne posée sur un sol horizontal avec les ombres qu'elle y projette, en supposant le point lumineux au centre du parallélépipède.

CHAPITRE VIII

MÉTHODES EN GÉOMÉTRIE

B. — **449**. — Montrer que les trois médianes d'un triangle peuvent être prises comme côtés d'un nouveau triangle. Le construire. Que sont les médianes de ce nouveau triangle ?

C. — **450**. — Construire, dans un plan donné, une droite de longueur donnée parallèle à une direction donnée et limitée à deux cercles, ou à un cercle et une droite.

B. — **451**. — Dans un triangle équilatéral OAB, on mène un cercle passant par le sommet O et le centre du cercle circonscrit ; il recoupe OA et OB en M et N. Montrer que : $OM + ON = OA$.

C. — **452**. — Etant donnés quatre points, construire un carré dont chaque côté passe par un de ces points.

B. — **453**. — On considère un triangle rectangle ABC, d'angle droit en A et la bissectrice BD de l'angle en B. Montrer que l'on a : $\overline{DC}^2 - \overline{DA}^2 = (BC - BA)^2$.

A. — **454**. — Quelle est la taille que doit avoir un miroir vertical, pour qu'une personne de $1^m,70$ puisse s'y voir en entier ?

A. — 455. — Quelle disposition forment les images d'un point lumineux, placé entre deux miroirs faisant entre eux l'angle α. Ces images peuvent-elles former un polygone régulier ?

A. — 456. — Quelles sont les diverses symétries du cube ?

B. — 457. — On peint les faces d'un cube avec trois couleurs différentes ; quelles sont les symétries que garde ce cube si l'on ne considère comme symétriques que des faces de même couleur ? On examinera les divers cas qui peuvent se présenter.

B. — 458. — On peint les faces d'un tétraèdre régulier avec une, deux ou trois couleurs différentes. Quelles sont les diverses symétries que possède encore ce tétraèdre ? (Voir n° **457**).

B. — 459. — Comment faut-il peindre avec deux couleurs différentes un prisme droit ayant pour base un hexagone régulier pour avoir le plus possible de symétries ? (Voir n° **457**).

A. — 460. — On donne deux cercles tangents à deux droites données Ox et Oy, et se coupant en M. Montrer que la droite OM les recoupe en P et Q, tels que l'on ait $OP.OQ = \overline{OM}^2$.

C. — 461. — Sur le cercle inscrit dans un carré ABCD, on prend un point M, tel que AM soit égal au côté du carré. Montrer que le milieu de CM est sur le cercle inscrit.

C. — 462. — Construire un parallélogramme connaissant les angles, le rapport des côtés et la somme des diagonales.

A. — 463. — Construire un carré dont les côtés aient des directions données et dont trois sommets soient sur les côtés d'un triangle équilatéral donné.

C. — 464. — Construire un triangle semblable à un triangle donné et dont les sommets soient sur un cercle donné.

A. — 465. — Construire un triangle rectangle isocèle connaissant la puissance du sommet de l'angle droit par rapport au cercle inscrit.

C. — 466. — Construire un triangle connaissant les trois hauteurs.

C. — 467. — Mener par un point A intérieur à un cercle une corde telle que A soit au tiers de cette corde.

C. — 468. — Résoudre l'exercice n° **262**, à l'aide de constructions graphiques.

C. — 469. — Tracer une droite interceptant sur deux circonférences données des cordes de longueurs données.

C. — 470. — Quel est le lieu géométrique du point de rencontre de deux cercles égaux dont l'un passe constamment par deux points fixes A, B d'une droite et l'autre par le point A et par un nouveau point fixe C de cette droite ?

CINÉMATIQUE

A. — 471. — A quelle distance se trouve un nuage électrisé, si l'on entend le coup de tonnerre $5^s,3$ après avoir vu l'éclair ? Les vitesses du son et de la lumière sont respectivement de 340^m et $300\,000^{km}$ par seconde.

A. — 472. — Un homme qui va en ligne droite, avec une vitesse constante, passe devant un bec de gaz allumé. Quel est le mouvement d'un point quelconque de son ombre ?

A. — 473. — Un train éprouve, à chaque changement de rail, un choc facilement perceptible. Si les rails ont comme longueur 15^m, quel est le nombre de secondes, pendant lequel il faut compter les chocs, pour que ce nombre de chocs donne précisément la vitesse en kilomètres à l'heure ?

A. — 474. — Un homme se déplace sur un trottoir avec une vitesse de 5^{km} à l'heure et un cycliste vient en sens inverse sur la chaussée. Entre les deux trajectoires rectilignes et parallèles, se trouve un arbre, à 2^m de la première et $3^m,50$ de la seconde. Quelle est la vitesse du cycliste si l'arbre le cache constamment à l'homme ?

A. — 475. — Un piéton, pour « étalonner » son pas, constate qu'en 3 minutes il fait 350 pas et parcourt 330 mètres. Quelle est la longueur de son pas et quelle est sa vitesse ?

A. — 476. — Un piéton, qui fait 5^{km} à l'heure, voit venir vers lui un cycliste qui passe en un point A de la route quand il est lui-même en un point B. Il fait, à partir de ce moment,

63 pas avant d'être rencontré par ce cycliste, puis fait 153 pas avant d'arriver en A. Quelle est la vitesse du cycliste ?

A. — **477**. — Un automobiliste veut parcourir 230^{km} en 3 heures. Au bout d'une heure de marche, il a un retard d'un quart d'heure; quelle vitesse devra-t-il fournir pour terminer son parcours dans le temps primitivement fixé.

B. — **478**. — On reprendra l'exercice n° **477**, en traçant le diagramme du mouvement, et examinant divers cas, suivant l'époque à laquelle survient l'arrêt de un quart d'heure.

C. — **479**. — Une troupe est en marche à la vitesse de 4^{km} à l'heure. Un cycliste qui va 5 fois plus vite s'en détache. et après avoir rencontré l'ennemi, revient sur ses pas et rejoint la troupe deux heures et demie après son départ. On demande à quelle distance de l'ennemi elle se trouve à ce moment-là, si l'ennemi fait également 4^{km} à l'heure en se portant à la rencontre de la troupe. Résoudre ce problème directement, puis à l'aide de diagrammes.

B. — **480**. — On lance deux mobiles sur une même droite, l'un avec un mouvement uniforme, l'autre avec un mouvement uniformément accéléré. Etudier les divers cas qui peuvent se produire, pour la rencontre des mobiles.

B. — **481**. — On lance deux pierres sur la même verticale à t secondes d'intervalles, avec des vitesses initiales v et v'. Se rencontreront-elles ?

C. — **482**. — Deux bateaux ont des vitesses de 20^{km} et 16^{km} à l'heure. Ils partent simultanément d'un même point dans deux directions rectangulaires. Etudier le mouvement apparent de l'un des bateaux pour un observateur situé sur l'autre.

B. — **483**. — Une balle tombe sans vitesse initiale. Quel est le mouvement de l'ombre que projette le soleil sur un mur vertical ?

C. — **484**. — Une balle tombe sans vitesse initiale. Quel est le mouvement de l'ombre que projette le soleil sur le sol horizontal ?

C. — **485**. — Lorsqu'un vase porte un orifice d'écoulement, le niveau baisse d'un mouvement uniformément accéléré, la vitesse se trouvant nulle au moment où le niveau est à la hauteur

de l'orifice. En déduire que la vitesse d'écoulement est proportionnelle à la racine carrée de la hauteur de l'eau au-dessus de cet orifice.

B. — **486.** — On laisse tomber un objet du haut de la tour Eiffel ; au bout de combien de temps atteindra-t-il le sol, en supposant que la loi de sa chute soit celle d'un corps soumis uniquement à l'action de la pesanteur ? De quelle hauteur devrait-il tomber pour arriver deux fois plus vite au sol ?

C. — **487.** — A l'entrée d'un puits de mine, on laisse tomber une pierre et l'on entend le bruit de sa chute au bout de 8 secondes. Quelle est la profondeur du puits, si l'on suppose négligeable la résistance de l'air. Le son à une vitesse de 340^{m} par seconde.

B. — **488.** — On cinématographie une boule qui tombe en prenant une photographie par dixième de seconde. Le temps pris pour impressionner la plaque sera supposé négligeable. Indiquer les résultats que l'ou obtiendra en supposant que la boule ait 6^{cm} de rayon. Combien y a-t-il d'images qui empiètent les unes sur les autres ?

B. — **489.** — Une roue de voiture fait 300 tours par kilomètre. Quelle est sa vitesse angulaire par rapport à la voiture, si cette dernière fait 15^{km} à l'heure ?

B. — **490.** — On suppose qu'une roue, qui a 24 rayons, tourne devant un cinématographe à raison de 75 tours par minute. Quelle doit être le plus petit intervalle de temps séparant deux clichés successifs pour que les rayons aient l'air immobiles ?

A. — **491.** — En supposant que la distance de la Terre au Soleil soit constante, et que le mouvement de rotation de la Terre autour du Soleil soit uniforme, quelle est en kilomètres à l'heure la vitesse linéaire de la Terre dans ce mouvement ? Evaluer cette même vitesse en C. G. S.

B. — **492.** — En supposant l'axe de la Terre immobile, quelle est pour un point de la Terre la vitesse angulaire due au mouvement diurne. La vitesse linéaire est-elle la même pour tous les points de la Terre dans ce mouvement ?

C. — **493.** — On considère un décamètre à ruban ayant les dimensions indiquées à l'exercice n° **193.** On demande de tracer le graphique de la vitesse linéaire, avec laquelle il faut

dérouler le ruban, pour que la vitesse angulaire de rotation du décamètre autour de son axe soit constante et égale à π.

C. — **494.** — On étudiera le graphique de la vitesse de rotation avec laquelle ce même décamètre se déroule (Voir nº **493**), en supposant la vitesse linéaire constante et égale à 50^{cm} par seconde.

C. — **495.** — Un treuil, de 20^{cm} de diamètre, supporte un poids qui se déroule d'un mouvement uniformément accéléré. L'accélération étant de 981^{cm} par seconde, étudier le graphique des vitesses angulaires avec lesquelles tourne le treuil.

C. — **496.** — Une toupie, que l'on va lancer, porte une corde de $1^{m},50$, enroulée sur un tronc de cône, de façon que la première spire ait 4^{cm} de longueur et la dernière, près de la pointe, $0^{cm},5$. On lance cette toupie de façon que la corde se déroule en un dixième de seconde avec une vitesse linéaire constante. Quelle est la fréquence du mouvement de rotation de la toupie ?

C. — **497.** — Si l'extrémité d'un diapason, portant un stylet enregistreur, vibre devant une plaque ayant un mouvement de translation, montrer que, pour une vitesse convenable de cette translation, la courbe ainsi tracée est une sinussoïde.

C. — **498.** — Quelle devrait être cette vitesse de translation dans l'exercice nº **497**, pour que l'on ait une sinussoïde avec un diapason donnant le la_3, c'est-à dire faisant 870 vibrations par seconde, l'amplitude de ces vibrations étant supposée de 1^{mm} ?

A. — **499.** — On constate, en se servant d'une presse à copier, qu'il faut donner trois tours de vis pour que le plateau descende de 5^{mm}. Quel est le pas de la vis ?

C. — **500.** — Un arbuste a ses feuilles distribuées à des intervalles réguliers sur une hélice. Le diamètre du tronc est de 3^{cm}, l'hélice a un pas de 48^{cm}, et chaque spire porte quatre feuilles. Y a-t-il d'autres hélices passant comme la première par les points d'insertion des feuilles ? Quels sont leurs pas ?

CARACTÈRES GRECS

Caractères grecs les plus employés en mathématiques

Majuscules	Désignations	Minuscules
	Alpha	α
	Bèta	β
Γ	Gamma	γ
Δ	Delta	δ
	Epsilonn	ε
	Thêta	θ
Λ	Lambda	λ
	Mu	μ
	Nu	ν
	Pi	π
	Ro	ρ
Σ	Sigma	σ
Φ	Phi	φ
Ψ	Psi	ψ
Ω	Oméga	ω

Nombres premiers de 1 à 1 000

1	97	229	379	541	691	863
2	101	233	383	547	701	877
3	103	239	389	557	709	881
5	107	241	397	563	719	883
7	109	251	401	569	727	887
11	113	257	409	571	733	907
13	127	263	419	577	739	911
17	131	269	421	587	743	919
19	137	271	431	593	751	929
23	139	277	433	599	757	937
29	149	281	439	601	761	941
31	151	283	443	607	769	947
37	157	293	449	613	773	953
41	163	307	457	617	787	967
43	167	311	461	619	797	971
47	173	313	463	631	809	977
53	179	317	467	641	811	983
59	181	331	479	643	821	991
61	191	337	487	647	823	997
67	193	347	491	653	827	
71	197	349	499	659	829	
73	199	353	503	661	839	
79	211	359	509	673	853	
83	223	367	521	677	857	
89	227	373	523	683	859	

Plus petits diviseurs des nombres de 1 à 1 000

(Les nombres divisibles par 2, 3, 5 ou premiers ne sont pas inscrits)

Nombres	Diviseurs	Nombres	Diviseurs	Nombres	Diviseurs	Nombres	Diviseurs	Nombres	Diviseurs
49	7	301	7	497	7	679	7	841	29
77	7	319	11	511	7	689	13	847	7
91	7	323	17	517	11	697	17	851	23
119	7	329	7	527	17	703	19	869	11
121	11	341	11	529	23	707	7	871	13
133	7	343	7	533	13	713	23	889	7
143	11	361	19	539	7	721	7	893	19
161	7	371	7	551	19	731	17	899	29
169	13	377	13	553	7	737	11	901	17
187	11	391	17	559	13	749	7	913	11
203	7	403	13	581	7	763	7	917	7
209	11	407	11	583	11	767	13	923	13
217	7	413	7	589	19	779	19	931	7
221	13	427	7	611	13	781	11	943	23
247	13	437	19	623	7	791	7	949	13
253	11	451	11	629	17	793	13	959	7
259	7	469	7	637	7	799	17	961	31
287	7	473	11	649	11	803	11	973	7
289	17	481	13	667	23	817	19	979	11
299	13	493	17	671	11	833	7	989	23

Nombres Diviseurs Nombres Diviseurs Nom res Diviseurs Nombres Diviseurs Nombres Diviseurs

Inverses, carrés, cubes, racines des nombres de 1 à 100.

N	$\frac{1}{N}$	N²	N³	$\sqrt{N}$	$\sqrt[3]{N}$	N	$\frac{1}{N}$	N²	N³	$\sqrt{N}$	$\sqrt[3]{N}$
1	1,0000	1	1	1,000	1,000	51	0,0196	2 601	132 651	7,141	3,708
2	0,5000	4	8	1,414	1,260*	52	0,0192	2 704	140 608	7,211	3,733*
3	0,3333	9	27	1,732	1,442	53	0,0189*	2 809	148 877	7,280	3,756
4	0,2500	16	64	2,000	1,587	54	0,0185	2 916	157 464	7,348	3,780*
5	0,2000	25	125	2,236	1,710*	55	0,0182*	3 025	166 375	7,416	3,803*
6	0,1667*	36	216	2,449	1,817	56	0,0179*	3 136	175 616	7,483	3,826*
7	0,1429*	49	343	2,646*	1,913*	57	0,0175	3 249	185 193	7,550*	3,849*
8	0,1250	64	512	2,828	2,000	58	0,0172	3 364	195 112	7,616*	3,871*
9	0,1111	81	729	3,000	2,080	59	0,0169	3 481	205 379	7,681	3,893*
10	0,1000	100	1 000	3,162	2,154	60	0,0167*	3 600	216 000	7,746*	3,915*
11	0,0909	121	1 331	3,317*	2,224	61	0,0164*	3 721	226 981	7,810	3,936
12	0,0833	144	1 728	3,464	2,289	62	0,0161	3 844	238 328	7,874	3,958*
13	0,0769	169	2 197	3,606*	2,351	63	0,0159*	3 969	250 047	7,937	3,979
14	0,0714	196	2 744	3,742*	2,410	64	0,0156	4 096	262 144	8,000	4,000
15	0,0667*	225	3 375	3,873	2,466	65	0,0154*	4 225	274 625	8,062	4,021*
16	0,0625	256	4 096	4,000	2,520*	66	0,0152*	4 356	287 496	8,124	4,041
17	0,0588	289	4 913	4,123	2,571	67	0,0149	4 489	300 763	8,185	4,062*
18	0,0556*	324	5 832	4,243*	2,621*	68	0,0147	4 624	314 432	8,246	4,082*
19	0,0526	361	6 859	4,359*	2,668	69	0,0145*	4 761	328 509	8,307*	4,102*
20	0,0500	400	8 000	4,472	2,714	70	0,0143*	4 900	343 000	8,367*	4,121
21	0,0476	441	9 261	4,583*	2,759*	71	0,0141*	5 041	357 911	8,426	4,141*
22	0,0455*	484	10 648	4,690	2,802	72	0,0139*	5 184	373 248	8,485	4,160
23	0,0435*	529	12 167	4,796*	2,844*	73	0,0137*	5 329	389 017	8,544	4,179
24	0,0417*	576	13 824	4,899*	2,884	74	0,0135	5 476	405 224	8,602	4,198
25	0,0400	625	15 625	5,000	2,924	75	0,0133	5 625	421 875	8,660	4,217

N	$\frac{1}{N}$	N^2	N^3	$\sqrt{N}$	$\sqrt[3]{N}$	N	$\frac{1}{N}$	N^2	N^3	$\sqrt{N}$	$\sqrt[3]{N}$
26	0,0385*	676	17 576	5,099	2,962	76	0,0132*	5 776	438 976	8,718*	4,236*
27	0,0374*	729	19 683	5,196	3,000	77	0,0130*	5 929	456 533	8,775*	4,254
28	0,0357	784	21 952	5,292*	3,037*	78	0,0128	6 084	474 552	8,832*	4,273*
29	0,0345*	841	24 389	5,385	3,072	79	0,0127*	6 241	493 039	8,888	4,291*
30	0.0333	900	27 000	5,477	3,107	80	0,0125	6 400	512 000	8,944	4,309*
31	0,0323*	961	29 791	5,568*	3,141	81	0,0123	6 561	531 441	9,000	4,327*
32	0,0312	1 024	32 768	5,657*	3,175*	82	0,0122*	6 724	551 368	9,055	4,344
33	0,0303	1 089	35 937	5,745*	3,208*	83	0,0120	6 889	571 787	9,110	4,362
34	0,0294	1 156	39 304	5,831*	3,240*	84	0,0119	7 056	592 704	9,165	4,380*
35	0,0286*	1 225	42 875	5,916	3,271	85	0,0118*	7 225	614 125	9,220*	4.397*
36	0,0278*	1 296	46 656	6,000	3,302*	86	0,0116	7 396	636 056	9,274*	4,414
37	0,0270	1 369	50 653	6,083*	3,332	87	0,0115*	7 569	658 503	9.327	4,431
38	0,0263	1 444	54 872	6,164	3,362*	88	0,0114*	7 744	681 472	9.381*	4,448*
39	0,0256	1 521	59 319	6,245*	3,391	89	0,0112	7 921	704 969	9,434*	4,465*
40	0,0250	1 600	64 000	6,325*	3,420*	90	0,0111	8 100	729 000	9.487*	4,481
41	0,0244*	1 681	68 921	6,403	3,448	91	0,0110*	8 281	753 571	9.539	4,498*
42	0,0238	1 764	74 088	6,481*	3,476	92	0,0109*	8 464	778 688	9,592*	4,514
43	0,0233*	1 849	79 507	6,557	3,503	93	0,0108*	8 649	804 357	9.644*	4,531*
44	0,0227	1 936	85 184	6,633	3,530	94	0,0106	8 836	830 584	9.695	4,547*
45	0,0222	2 025	91 125	6,708	3,557*	95	0,0105	9 025	857 375	9.747*	4,563*
46	0,0217	2 116	97 336	6,782	3,583	96	0,0104	9 216	884 736	9,798*	4.579*
47	0,0213*	2 209	103 823	6,856*	3,609*	97	0,0103	9 409	912 673	9,849*	4.595*
48	0,0208	2 304	110 592	6,928	3,634	98	0,0102	9 604	941 192	9,899	4,610
49	0,0204	2 401	117 649	7,000	3.659	99	0,0101	9 801	970 299	9,950*	4,626
50	0.0200	2 500	125 000	7,071	3,684	100	0,0100	10 000	1 000 000	10,000	4,642*

Le signe * suivant la dernière décimale d'un nombre indique que cette décimale correspond à une valeur approchée *par excès*.

Logarithmes des nombres de 100 à 999

Nombres	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0 000	043	086	128	170	212*	253	294*	334	374
1	414*	453	492	531*	569	607*	645*	682*	719*	755
2	792*	828*	864*	899	934	969				
12	1						004*	038	072	106*
3	139	173*	206*	239*	271	303	335	367	399*	430
4	461	492	523*	553	584*	614*	644*	673	703*	732*
5	761*	790*	818	847*	875	903	931	959*	987*	
15	2									014*
6	041	068	095	122*	148	175*	201	227	253	279*
7	304	330*	355	380	405	430	455	480*	504	529*
8	553*	577*	601*	625*	648	672*	695	718	742*	765*
9	788*	810	833	856*	878	900	923*	945*	967*	989*
20	3 010	032*	054*	075*	096	118*	139*	160*	181*	201
1	222	243*	263	284*	304	324	345*	365*	385*	404
2	424	444*	464*	483	502	522*	541	560	579	598
3	617	636	655*	674*	692	711*	729	747	766*	784*
4	802	820	838	856	874*	892*	909	927*	945*	962*
5	979	997*								
25	4		014	031	048	065	082	099	116	133*
6	150*	166	183	200*	216	232	249*	265	281	298*
7	314*	330*	346*	362*	378*	393	409	425*	440	456
8	472*	487	502	518*	533	548	564*	579*	594*	609
9	624*	639*	654*	669*	683	698	713*	728*	742	757*
30	4 771	786*	800	814	829*	843*	857	871	886*	900*
1	914*	928*	942*	955	969	983	997*			
31	5							011*	024	038*
2	051*	065	079*	092	105	119*	132	145	159*	172*
3	185	198	211	224	237	250	263	276	289	302*

Nombres	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
34	5 315*	328*	340	353*	366*	378	391*	403	416*	428
5	441*	453	465	478*	490	502	514	527*	539*	551*
6	563	575	587	599	611	623*	635*	647*	658	670
7	682	694*	705	717	729*	740	752*	763	775*	786
8	798*	809	821*	832*	843	855*	866*	877	888	899
9	911*	922*	933*	944*	955*	966*	977*	988*	999*	010*
39	6									
40	6 021*	031	042	053	064*	075*	085	096*	107*	117
1	128*	138	149*	160*	170	180	191*	201	212*	222
2	232	243*	253	263	274*	284*	294	304	314	325*
3	335*	345*	355*	365*	375*	385*	395*	405*	415*	425*
4	435*	444	454	464	474*	484*	493	503	513*	522
5	532	542*	551	561*	571*	580	590*	599	609*	618
6	628*	637	646	656*	665	675*	684*	693	702	712*
7	721*	730	739	749*	758*	767*	776	785	794	803
8	812	821	830	839	848	857	866	875	884	893
9	902*	911*	920*	928	937	946	955*	964*	972	981
50	6 990*	998								
50	7		007	016*	024	033*	042*	050	059*	067
1	076*	084	093*	101	110*	118	126	135*	143	152*
2	160	168	177*	185	193	202*	210*	218	226	235*
3	243*	251*	259	267	275	284*	292*	300*	308*	316*
4	324*	332*	340*	348*	356*	364*	372*	380*	388*	396*
5	404*	412*	419	427	435	443*	451*	459*	466	474
6	482*	490*	497	505	513*	520	528	536*	543	551
7	559*	566	574*	582*	589	597*	604	612*	619	627*
8	634	642*	649	657*	664	672*	679*	686	694*	701
9	709*	716*	723	731*	738*	745	752	760*	767	774

Le signe * suivant la dernière décimale d'un nombre indique que cette décimale correspond à une valeur approchée *par excès*.

Table parties proportionnelles

	10	15	20	25	30	35	40	45
	8	12	16	20	24	28	32	36
	6	9	12	15	18	21	24	27
	4	6	8	10	12	14	16	18
	2	3	4	5	6	7	8	9
	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	0	0	0	1*	1*	1*	1*
2	0	1*	1*	1	1	1	2*	2*
3	1*	1*	1	1	2*	2	2	3*
4	1*	1	2*	2	2	3*	3	4*
5	1	1	2	2	3	3	4	4

Logarithmes des nombres de 100 *à* 999 (suite et fin

Nombres	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
60	7 782*	789*	796*	803	810	818*	825*	832*	839	846
1	853	860	868*	875*	882*	889*	896*	903*	910*	917*
2	924*	931*	938*	945*	952*	959*	966*	973*	980*	987*
3	993									
63	8	000	007	014	021*	028*	035*	041	048	055
4	062*	069*	075	082	089*	096*	102	109	116*	122
5	129	136*	142	149	156*	162	169	176*	182	189*
6	195	202	209*	215	222*	228	235*	241	248*	254
7	261*	267	274*	280	287*	293	299	306*	312	319*
8	325	331	338*	344	351*	357*	363	370*	376*	382
9	388	395*	401	407	414*	420*	426	432	439*	445*
70	8 451*	457	463	470*	476*	482*	488	494	500	506
1	513*	519*	525*	531*	537*	543	549	555	561	567
2	573	579	585	591	597	603	609	615	621	627
3	633	639	645	651	657*	663*	669*	675*	681*	686
4	692	698	704	710*	716*	722*	727	733	739	745*
5	751*	756	762	768*	774*	779	785	791*	797*	802
6	808	814*	820*	825	831*	837*	842	848*	854*	859
7	865*	871*	876	882*	887	893	899*	904	910*	915
8	921*	927*	932	938*	943	949*	954	960*	965	971*
9	976	982*	987	993*	998					
79	9					004*	009	015*	020	025

Nombres	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
80	9 031*	036	042*	047	053*	058*	063	069*	074	079
1	085*	090	096*	101*	106	112*	117*	122	128*	133*
2	138	143	149*	154*	159	165*	170*	175	180	186*
3	191*	196	201	206	212*	217*	222	227	232	238*
4	243*	248*	253	258	263	269*	274*	279*	284*	289
5	294	299	304	309	315*	320*	325*	330*	335*	340*
6	345*	350	355	360	365	370	375	380	385	390
7	395	400	405	410	415	420	425	430*	435*	440*
8	445*	450*	455*	460*	465*	469	474	479	484	489
9	494*	499*	504*	509*	513	518	523	528*	533*	538*
90	9 542	547	552	557*	562*	566	571	576	581*	586*
1	590	595	600*	605*	609	614	619*	624*	628	633
2	638*	643*	647	652	657*	661	666	671*	675	680
3	685*	689	694	699*	703	708	713*	717	722	727*
4	731	736*	741*	745	750*	754	759*	763	768	773*
5	777	782*	786	791*	795	800	805*	809	814*	818
6	823*	827	832*	836	841*	845	850*	854	859*	863
7	868*	872	877*	881	886*	890	894	899*	903	908*
8	912	917*	921	926*	930*	934	939*	943	948*	952*
9	956	961*	965	969	974*	978	983*	987*	991	996*

Le signe * suivant la dernière décimale d'un nombre indique que cette décimale correspond à une valeur approchée *par excès*.

Table
: parties proportionnelles

0	10	15	20	25	30	35	40	45
0	8	12	16	20	24	28	32	36
0	6	9	12	15	18	21	24	27
0	4	6	8	10	12	14	16	18
0	2	3	4	5	6	7	8	9
Différences	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	0	0	0	1*	1*	1*	1*
2	0	1*	1*	1	1	1	2*	2*
3	1*	1*	1	1	2*	2	2	3*
4	1*	1	2*	2	2	3*	3	4*
5	1	1	2	2	3	3	4	4

Nombres dont les logarithmes vont de 0,000 à 0,999

Log	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
00	1 000	002	005*	007*	009	012*	014*	016	019*	021*
1	023	026*	028	030	033*	035	038*	040*	042	045*
2	047	050*	052*	054	057*	059	062*	064	067*	069
3	072*	074*	076	079*	081	084*	086	089*	091	094*
4	096	099	102*	104	107*	109	112*	114	117*	119
5	122	125*	127	130*	132	135	138*	140	143*	146*
6	148	151*	153	156	159*	161	164	167*	169	172
7	175*	178*	180	183	186*	189*	191	194*	197*	199
8	202	205	208*	211*	213	216	219*	222*	225*	227
9	230	233	236*	239*	242*	245*	247	250	253	256
10	1 259*	262*	265*	268*	271*	274*	276	279	282	285
1	288	291	294	297	300	303	306	309	312	315
2	318	321	324	327	330	334*	337*	340*	343*	346*
3	349*	352	355	358	361	365*	368*	371*	374	377
4	380	384*	387*	390*	393	396	400*	403*	406	409
5	413*	416*	419	422	426*	429*	432	435	439*	442
6	445	449*	452	455	459*	462	466*	469*	472	476*
7	479	483*	486*	489	493*	496	500*	503	507*	510
8	514*	517	521*	524	528*	531	535*	538	542*	545
9	549*	552	556*	560*	563	567*	570	574*	578*	581
20	1 585*	589*	592	596*	600*	603	607*	611*	614	618
1	622*	626*	629	633	637*	641*	644	648	652*	656*
2	660*	663	667	671	675*	679*	683*	687*	690	694
3	698	702	706	710	714*	718*	722*	726*	730*	734*
4	738*	742*	746*	750*	754*	758*	762*	766	770	774
5	778	782	786	791*	795*	799*	803	807	811	816*

Log	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
26	1 820*	824*	828	832	837*	841*	845	849	854*	858*
7	862	866	871*	875*	879	884*	888*	892	897*	901
8	905	910*	914	919*	923	928*	932*	936	941*	945
9	950*	954	959*	963	968*	972	977*	982*	986	991*
30	1 995									
0	2	000*	004	009	014*	018	023	028*	032	037
1	042*	046	051	056*	061*	065	070	075*	080*	084
2	089	094	099*	104*	109*	113	118	123	128	133
3	138*	143*	148*	153*	158*	163*	168*	173*	178*	183*
4	188*	193*	198*	203*	208	213	218	223	228	234*
5	239*	244*	249	254	259	265*	270*	275	280	286*
6	291*	296	301	307*	312	317	323*	328	333	339*
7	344	350*	355	360	366*	371	377*	382	388*	393
8	399*	404	410*	415	421	427*	432	438*	443	449
9	455*	460	466	472*	477	483	489*	495*	500	506
40	2 512*	518*	523	529	535	541*	547*	553*	559*	564
1	570	576	582	588	594	600	606	612	618	624
2	630	636	642	649*	655*	661*	667*	673	679	685
3	692*	698*	704*	710	716	723*	729*	735	742*	748*
4	754	761*	767*	773	780*	786	793*	799*	805	812*
5	818	825*	831	838*	844	851	858*	864	871*	877
6	884	891*	897	904	911*	917	924	931*	938*	944
7	951	958	965*	972*	979*	985	992	999		
7	3								006	013
8	020*	027*	034*	041*	048*	055*	062*	069	076	083
9	090	097	105*	112*	119*	126	133	141*	148*	155

Table
parties proportionnelles

10	15	20	25	30	35	40	45
8	12	16	20	24	28	32	36
6	9	12	15	18	21	24	27
4	6	8	10	12	14	16	18
2	3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	1*	1*	1*	1*
0	1*	1*	1	1	1	2*	2*
1*	1*	1	1	2*	2	2	3*
1*	1	2*	2	2	3*	3	4*
1	1	2	2	3	3	4	4

Le signe * suivant la dernière décimale d'un nombre indique que cette décimale correspond à une valeur approchée *par excès*.

Nombres dont les logarithmes vont de 0,000 *à* 0,999 (suite et fin)

Log	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	3 162	170*	177*	184	192*	199*	206	214*	221	228
1	236*	243	251*	258	266*	273	281*	289*	296	304*
2	311	319*	327*	334	342*	350*	357	365	373*	381*
3	388	396	404	412*	420*	428*	436*	443	451	459
4	467	475	483	491	499	508*	516*	524*	532*	540*
5	548	556	565*	573*	581*	589	597	606*	614	622
6	631*	639	648*	656*	664	673*	681	690*	698	707*
7	715	724*	733*	741	750*	758	767	776*	784	793
8	802*	811*	819	828	837	846*	855*	864*	873*	882*
9	890	899	908	917	926	936*	945*	954*	963*	972*
60	3 981	990	999							
0	4			009*	018*	027	036	046*	055	064
1	074*	083	093*	102	111	121*	130	140*	150*	159
2	169*	178	188*	198*	207	217*	227*	236	246	256*
3	266*	276*	285	295	305	315	325	335	345	355
4	365	375	385	395	406*	416*	426*	436	446	457*
5	467*	477	487	498*	508	519*	529*	539	550*	560
6	571*	581	592*	603*	613	624*	634	645	656*	667*
7	677	688	699*	710*	721*	732*	742	753	764	775
8	786	797	808	819	831*	842*	853*	864	875	887*
9	898*	909	920	932*	943	955*	966*	977	989*	
9	5									000
70	5 012*	023	035	047*	058	070*	082*	093	105	117*
1	129*	140	152	164	176	188	200*	212*	224*	236
2	248	260	272	284	297*	309*	321	333	346*	358*
3	370	383*	395	408*	420	433*	445	458*	470	483*
4	495	508	521*	534*	546	559	572*	585*	598*	610
5	623	636	649	662	675	689*	702*	715*	728*	741

Log	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
76	5 754	768*	781*	794	808*	821	834	848*	861	875*
7	888	902	916*	929	943*	957*	970	984	998*	
7	6									012*
8	026*	039	053	067	081	095	109	124*	138*	152*
9	169*	180	194	209*	223	237	252*	266	281*	295
80	6 310*	324	339*	353	368*	383*	397	412	427*	442*
1	457*	471	486	501	516	531	546	561	577*	592*
2	607*	622	637	653*	668	683	699*	714	730*	745
3	761*	776	792	808*	823	839	855*	871*	887*	902
4	918	934	950	966	982	998				
4	7						015*	031*	047*	063
5	079	096*	112	129*	145*	161	178*	194	211	228*
6	244	261	278*	295*	311	328	345	362	379	396
7	413	430	447	464	482*	499*	516	534*	551*	568
8	586*	603	621*	638	656*	674*	691	709	727*	745*
9	762	780	798	816	834	852	870	889*	907*	925
90	7 943	962*	980*	998						
0	8				017*	035	054*	072	091*	110*
1	128	147	166*	185*	204*	222	241	260	279	299*
2	318*	337*	356	375	395*	414*	433	453*	472	492*
3	511	531	551*	570	590	610*	630*	650*	670*	690*
4	710*	730*	750*	770	790	810	831*	851	872*	892
5	913*	933	954*	974	995*					
5	9					016*	036	057	078	099
6	120	141	162	183	204	226*	247*	268	290*	311
7	333*	354	376*	397	419*	441*	462	484	486	528*
8	550*	572*	594	616	638	661*	683*	705	727	750*
9	772	795*	817	830	863*	886*	908	931	954	977

Le signe * suivant la dernière décimale d'un nombre indique que cette décimale correspond à une valeur approchée *par excès.*

Table
parties proportionnelles

10	15	20	25	30	35	40	45
8	12	16	20	24	28	32	36
6	9	12	15	18	21	24	27
4	6	8	10	12	14	16	18
2	3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	1*	1*	1*	1*
0	1*	1*	1	1	1	2*	2*
1*	1*	1	1	2*	2	2	3*
1*	1	2*	2	2	3*	3	4*
1	1	2	2	3	3	4	4

Logarithmes de $\left(1 + \frac{t}{100}\right)$ *pour les calculs d'intérêts composés*

Taux : t	Logarithmes	Taux : t	Logarithmes
2,5 %	0,010724*	4 %	0,017033
3 —	0,012837	4,5 —	0,019116
3,5 —	0,014940	5 —	0,021189

Multiples usuels de π et leurs logarithmes

	Nombres	Logarithmes		Nombres	Logarithmes
π	3,14159	0,4971	$\frac{1}{\pi}$	0,31831*	$\bar{1}$,5029*
$\sqrt{\pi}$	1,77245	0,2486*	$\frac{1}{\sqrt{\pi}}$	5,64190*	$\bar{1}$,7514
$\frac{\pi}{200}$	0,01571*	$\bar{2}$,1961	$\frac{200}{\pi}$	63,66198*	1,8039*
$\frac{\pi}{180}$	0,01745	$\bar{2}$,2419*	$\frac{180}{\pi}$	57,29578*	1,7581
2π	6,28319*	0,7982*	$\frac{\pi}{3}$	1,04720*	0,0200
$\frac{\pi}{2}$	1,57080*	0,1961	$\frac{4\pi}{3}$	4,18879	0,6221*
$\frac{\pi}{4}$	0,78540*	$\bar{1}$,8951	$\frac{\pi}{6}$	0,52360*	$\bar{1}$,7190*

Conversion des radians en degrés et grades

Radians	Degrés	Grades	Radians	Degrés	Grades
0,1	5°44'*	6^{γ},37*	0,01	0°34'	0^{γ},64*
0,2	11 28*	12, 73	0,02	1 09*	1, 27
0,3	17 11	19, 10*	0,03	1 43	1, 91
0,4	22 55	25, 46	0,04	2 18*	2, 55*
0,5	28 39*	31, 83	0,05	2 52*	3, 18
0,6	34 23*	38, 20*	0,06	3 26	3, 82
0,7	40 06	44, 56	0,07	4 01*	4, 46*
0,8	45 50	50, 93*	0,08	4 35	5, 09
0,9	51 34*	57, 30*	0,09	5 09	5, 73*
1	57 18*	63, 66			

Le signe * suivant la dernière décimale d'un nombre indique que cette décimale correspond à une valeur approchée *par excès*.

Conversion des degrés en grades et radians

Degrés	Grades	Radians	Minutes	Grades	Radians
1°	1^{γ},11	0,017	1'	0^{γ},02*	0,000
2	2, 22	0,035*	2	0, 04*	0,001*
3	3, 33	0,052	3	0, 06*	0,001*
4	4, 44	0,070*	4	0, 07	0,001
5	5, 56*	0,087	5	0, 09	0,001
6	6, 67*	0,105*	6	0, 11	0,002*
7	7, 78*	0,122	7	0, 13*	0,002
8	8, 89*	0,140*	8	0, 15*	0,002
9	10, 00	0,157	9	0, 17*	0,003*
10	11, 11	0,175*	10	0, 19*	0,003*
20	22, 22	0,349	20	0, 37	0,006*
30	33, 33	0,524*	30	0, 56*	0,009*
40	44, 44	0,698	40	0, 74	0,012*
50	55, 56*	0,873*	50	0, 93*	0,015*
60	66, 67*	1,047			
70	77, 78*	1,222*			
80	88, 89*	1,396			
90	100, 00	1,571*			

Conversion des grades en degrés et radians

Grades	Degrés	Radians	Grades	Degrés	Radians
1^{γ}	0°54'	0,016*	0^{γ},01'	0°01'*	0,000
2	1 48	0,031	0, 02	0 01	0,000
3	2 42	0,047	0, 03	0 02*	0,000
4	3 36	0,063*	0, 04	0 02	0,001*
5	4 30	0,079*	0, 05	0 03*	0,001*
6	5 24	0,094	0, 06	0 03	0,001*
7	6 18	0,110*	0, 07	0 04*	0,001
8	7 12	0,126*	0, 08	0 04	0,001
9	8 06	0,141	0, 09	0 05*	0,001
10^{γ}	9°	0,157	0^{γ},1	0°05'	0,002*
20	18	0,314	0, 2	0 11*	0,003
30	27	0,471	0, 3	0 16	0,005*
40	36	0,628	0, 4	0 22*	0,006
50	45	0,785	0, 5	0 27	0,008*
60	54	0,942	0, 6	0 32	0,009
70	63	1,100*	0, 7	0 38*	0,011*
80	72	1,257*	0, 8	0 43	0,013*
90	81	1,414*	0, 9	0 49*	0,014

Le signe * suivant la dernière décimale d'un nombre indique que cette décimale correspond à une valeur approchée *par excès*.

Lignes trigonométriques naturelles

Grades

x	sin x	tg x	cotg x	cos x	
0ᵞ	0,000*	0,000	∞	1,000	100
1	016*	016*	63,657*	1,000*	99
2	031	031	31,821*	1,000*	98
3	047	047	21,205*	0,999*	97
4	063*	063*	15,895*	998	96
5	078	079*	12,706	997*	95
6	094	095*	10,579*	996*	94
7	110*	110	9,058*	994*	93
8	125	126	7,916*	992	92
9	141*	142	7,026	990	91
10	156	158	6,314*	988*	90ᵞ
11ᵞ	0,172*	0,175*	5,730*	0,985	89
12	187	191*	5,242	982	88
13	203*	207	4,829*	979	87
14	218	224*	474*	976*	86
15	233	240	4,165	972	85
16	249*	257*	3,895*	969*	84
17	264*	274*	655	965*	83
18	279*	291*	442	960	82
19	294	308*	251*	956*	81
20	309	325*	3,078*	951	80ᵞ
21ᵞ	0,324*	0,342	2,921*	0,946	79
22	339*	360	778*	941*	78
23	353	378*	646	935	77
24	0,368	0,396*	2,526*	0,930*	76ᵞ

Degrés

x	sin x	tg x	cotg x	cos x	
0°	0,000	0,000	∞	1,000	90
1	017	017	57,290*	1,000*	89
2	035*	035*	28,636	0,999	88
3	052	052	19,081	999*	87
4	070*	070*	14,301*	998*	86
5	087	087	11,430	996	85°
6°	0,105*	0,105	9,514	0,995*	84
7	122*	123*	8,144	993*	83
8	139	141*	7,115	990	82
9	156	158	6,314*	988*	81
10	174*	176	5,671	985*	80°
11°	0,191*	0,194	5,145*	0,982*	79
12	208*	213*	4,705*	978	78
13	225*	231*	331	974	77
14	242*	249	4,011*	970	76
15	259*	268*	3,732	966*	75°
16°	0,276*	0,287*	3,487	0,961	74
17	292	306*	271*	956	73
18	309	325*	3,078*	951	72
19	326*	344	2,904	946*	71
20	342	364*	747	940*	70°
21°	0,358	0,384*	2,605	0,934*	69
22	0,375*	0,404	2,475	0,927	68°

Table
parties proportionnelles

10	15	20	25	30	35	40	45
8	12	16	20	24	28	32	36
6	9	12	15	18	21	24	27
4	6	8	10	12	14	16	18
2	3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	1*	1*	1*	1*
0	1*	1*	1	1	1	2*	2*
1*	1*	1	1	2*	2	2	3*
1*	1	2*	2	2	3*	3	4*
1	1	2	2	3	3	4	4

Grades

25ᵞ	0,383*	0,414	2,414	0,924*	75
26	397	433*	311*	918*	74
27	412*	452*	215*	911	73
28	426*	471*	125	905*	72
29	440*	490*	2,041	898	71
30	454*	510*	1,963*	891	70ᵞ
31ᵞ	0,468*	0,529	1,889*	0,884*	69
32	482*	550*	819*	876	68
33	495	570	753	869*	67
34	509	591	691*	861*	66
35	523*	613*	632*	853*	65
36	536*	635*	576*	844	64
37	549	657*	522	836*	63
38	562	680*	471	827	62
39	575	703*	423*	818	61
40	588*	727*	376	809	60ᵞ
41ᵞ	0,600	0,751*	1,332*	0,800*	59
42	613*	776*	289	790	58
43	625	801	248	780	57
44	637	827	209*	771*	56
45	649	854	171*	760	55
46	661	882*	134	750	54
47	673	910*	099*	740*	53
48	685*	939	065*	729*	52
49	696*	0,969	032*	718	51
50	0,707	1,000	1,000	0,707	50ᵞ
	cos y	cotg y	tg y	sin y	y

Degrés

23°	0,391*	0,424	2,356*	0,921*	67
24	407*	445	246	914*	66
25	423*	466	145*	906	65°
26°	0,438	0,488*	2,050	0,899*	64
27	454*	510*	1,963*	891	63
28	469	532*	881*	883*	62
29	485*	554	804	875*	61
30	500	577	732	866	60°
31°	0,515	0,601*	1,664	0,857	59
32	530*	625*	600	848	58
33	545*	649	540*	839*	57
34	559	675*	483*	829	56
35	574*	700	428	819	55°
36°	0,588*	0,727*	1,376	0,809	54
37	602*	754*	327	799*	53
38	616*	781	280*	788	52
39	629	810*	235*	777	51
40	643*	839	192*	766	50°
41°	0,656	0,869	1,150	0,755*	49
42	669	900	111*	743	48
43	682*	933*	072	731	47
44	695*	0,966*	036*	719	46
45	0,707	1,000	1,000	0,707	45°
	cos y	cotg y	tg y	sin y	y

Le signe * suivant la dernière décimale d'un nombre indique que cette décimale correspond à une valeur approchée *par excès*.

Logarithmes des sinus et cosinus des arcs de 0^{γ} *à* 100^{γ}

0^{γ} à 3^{γ} →			3^{γ} à 10^{γ} →			10^{γ} à 50^{γ} →			50^{γ} à 100^{γ} →		
x ↓	log sin x		x ↓	log sin x		x ↓	log sin x		x ↓	log sin x	
0^{γ},00	$-\infty$	100^{γ},00	3^{γ},0	$\overline{2}$,673	97^{γ},0	10^{γ},0	$\overline{1}$,194	90^{γ},0	50^{γ}	$\overline{1}$,849	50^{γ}
0, 05	$\overline{4}$,895	99, 95	3, 1	687	96, 9	10, 5	215	89, 5	51	856	49
0, 10	$\overline{3}$,196	99, 90	3, 2	701	96, 8	11, 0	235	89, 0	52	863*	48
0, 15	372	99, 85	3, 3	714	96, 7	11, 5	254	88, 5	53	869	47
0, 20	497	99, 80	3, 4	727	96, 6	12, 0	273*	88, 0	54	875	46
0, 25	594	99, 75	3, 5	740*	96, 5	12, 5	290	87, 5	55	881	45
0, 30	673	99, 70	3, 6	752	96, 4	13, 0	307	87, 0	56	887*	44
0, 35	741*	99, 65	3, 7	764	96, 3	13, 5	323	86, 5	57	892	43
0, 40	798	99, 60	3, 8	776*	96, 2	14, 0	339*	86, 0	58	898*	42
0, 45	849	99, 55	3, 9	787*	96, 1	14, 5	354*	85, 5	59	903*	41
0^{γ},50	$\overline{3}$,895	99^{γ},50	4^{γ},0	$\overline{2}$,798*	96^{γ},0	15^{γ},0	$\overline{1}$,368	85^{γ},0	60^{γ}	$\overline{1}$,908*	40^{γ}
0, 55	936	99, 45	4, 1	809*	95, 9	15, 5	382	84, 5	61	913*	39
0, 60	$\overline{3}$,974	99, 40	4, 2	819	95, 8	16, 0	396*	84, 0	62	918*	38
0, 65	$\overline{2}$,009	99, 35	4, 3	829	95, 7	16, 5	409*	83, 5	63	922	37
0, 70	041	99, 30	4, 4	839	95, 6	17, 0	421	83, 0	64	927*	36
0, 75	071	99, 25	4, 5	849*	95, 5	17, 5	434*	82, 5	65	931*	35
0, 80	099	99, 20	4, 6	858	95, 4	18, 0	446*	82, 0	66	935*	34
0, 85	126*	99, 15	4, 7	868*	95, 3	18, 5	457	81, 5	67	939*	33
0, 90	150	99, 10	4, 8	877*	95, 2	19, 0	468	81, 0	68	943*	32
0, 95	174*	99, 05	4, 9	886*	95, 1	19, 5	479	80, 5	69	946	31
1^{γ},00	$\overline{2}$,196	99^{γ},00	5^{γ},0	$\overline{2}$,895*	95^{γ},0	20^{γ}	$\overline{1}$,490*	80^{γ}	70^{γ}	$\overline{1}$,950*	30^{γ}
1, 05	217	98, 95	5, 2	912*	94, 8	21	510	79	71	953	29
1, 10	237	98, 90	5, 4	928*	94, 6	22	530*	78	72	957*	28
1, 15	257*	98, 85	5, 6	944*	94, 4	23	548	77	73	960*	27
1, 20	275	98, 80	5, 8	$\overline{2}$,959*	94^{γ},2	24	566*	76	74	963*	26
1, 25	$\overline{2}$,293	98^{γ},75				25	$\overline{1}$,583*	75^{γ}	75	$\overline{1}$,966*	25^{γ}

	log cos y	y
1^{γ},30	$\bar{2}$,310	98, 70
1, 35	326	98, 65
1, 40	342	98, 60
1, 45	357	98, 55
1^{γ},50	$\bar{2}$,372	98^{γ},50
1, 55	386	98, 45
1, 60	400	98, 40
1, 65	414*	98, 35
1, 70	427*	98, 30
1, 75	439	98, 25
1, 80	451	98, 20
1, 85	463	98, 15
1, 90	475*	98, 10
1, 95	486	98, 05
2^{γ},0	$\bar{2}$,497	98^{γ},0
2, 1	518	97, 9
2, 2	538	97, 8
2, 3	558*	97, 7
2, 4	576	97, 6
2, 5	594*	97, 5
2, 6	611*	97, 4
2, 7	627	97, 3
2, 8	643	97, 2
2, 9	658	97, 1
3^{γ},0	$\bar{2}$,673	97^{γ},0

97^{γ} à 100^{γ}

	log cos y	y
6^{γ},0	$\bar{2}$,974*	94^{γ},0
6, 2	$\bar{2}$,988*	93, 8
6, 4	$\bar{1}$,002*	93, 6
6, 6	015*	93, 4
6, 8	028*	93, 2
7^{γ},0	$\bar{1}$,040	93^{γ},0
7, 2	053*	92, 8
7, 4	064	92, 6
7, 6	076*	92, 4
7, 8	087	92, 2
8^{γ},0	$\bar{1}$,098	92^{γ},0
8, 2	109*	91, 8
8, 4	119	91, 6
8, 6	129	91, 4
8, 8	139	91, 2
9^{γ},0	$\bar{1}$,149*	91^{γ},0
9, 2	158	90, 8
9, 4	168*	90, 6
9, 6	177*	90, 4
9, 8	186*	90, 2
10^{γ},0	$\bar{1}$,194	90^{γ},0

90^{γ} à 97^{γ}

	log cos y	y
26^{γ}	$\bar{1}$,599*	74
27	614	73
28	629	72
29	643	71
30^{γ}	$\bar{1}$,657	70^{γ}
31	670	69
32	683*	68
33	695	67
34	707*	66
35	718	65
36	729	64
37	740*	63
38	750*	62
39	760*	61
40^{γ}	$\bar{1}$,769	60^{γ}
41	778	59
42	787	58
43	796	57
44	804	56
45	813*	55
46	820	54
47	828	53
48	835	52
49	843*	51
50^{γ}	$\bar{1}$,849	50^{γ}

50^{γ} à 90^{γ}

	log cos y	y
76^{γ}	$\bar{1}$,968	24
77	971	23
78	974*	22
79	976*	21
80^{γ}	$\bar{1}$,978	20^{γ}
81	980	19
82	982	18
83	984	17
84	986	16
85	988*	15
86	989	14
87	991*	13
88	992	12
89	993	11
90^{γ}	$\bar{1}$,995*	10^{γ}
91	996*	9
92	997*	8
93	997	7
94	998	6
95	999*	5
96	$\bar{1}$,999	4
97	0,000*	3
98	000*	2
99	000*	1
100	0,000	0^{γ}

0^{γ} à 50^{γ}

Le signe * suivant la dernière décimale d'un nombre indique que cette décimale correspond à une valeur approchée *par excès*.

Table
parties proportionnelles

10	15	20	25	30	35	40	45
8	12	16	20	24	28	32	36
6	9	12	15	18	21	24	27
4	6	8	10	12	14	16	18
2	3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	1*	1*	1*	1*
0	1*	1*	1	1	1	2*	2*
1*	1*	1	1	2*	2	2	3*
1*	1	2*	2	2	3*	3	4*
1	1	2	2	3	3	4	4

Logarithmes des tangentes et des cotangentes des arcs de 0^{γ} *à* 100^{γ}

(Pour les arcs x allant de 0^{γ} à 2^{γ} et les arcs y allant de 98^{γ} à 100^{γ}, on se servira de la table des logarithmes de sinus et cosinus, table qui, dans cet intervalle, est identique, à un cinq-millième près, à celle des tangentes et cotangentes)

2^{γ} à 5^{γ}

x	log tg x = — log cotg x	
$2^{\gamma},0$	$\overline{2},497$	$98^{\gamma},0$
2, 1	518	97, 9
2, 2	539*	97, 8
2, 3	558	97, 7
2, 4	577*	97, 6
2, 5	594	97, 5
2, 6	611	97, 4
2, 7	628*	97, 3
2, 8	644*	97, 2
2, 9	659*	97, 1
$3^{\gamma},0$	$\overline{2},674$*	$97^{\gamma},0$
3, 1	688*	96, 9
3, 2	702*	96, 8
3, 3	715	96, 7
3, 4	728	96, 6
3, 5	741*	96, 5
3, 6	753*	96, 4
3, 7	765*	96, 3
3, 8	776	96, 2
3, 9	$\overline{2},788$*	96, 1

5^{γ} à 10^{γ}

x	log tg x = — log cotg x	
$5^{\gamma},0$	$\overline{2},896$*	$95^{\gamma},0$
5, 2	913	94, 8
5, 4	930*	94, 6
5, 6	945	94, 4
5, 8	961*	94, 2
$6^{\gamma},0$	$\overline{2},976$*	$94^{\gamma},0$
6, 2	$\overline{2},990$*	93, 8
6, 4	$\overline{1},004$*	93, 6
6, 6	017	93, 4
6, 8	030	93, 2
$7^{\gamma},0$	$\overline{1},043$*	$93^{\gamma},0$
7, 2	055	92, 8
7, 4	067	92, 6
7, 6	079	92, 4
7, 8	090	92, 2
$8^{\gamma},0$	$\overline{1},102$*	$92^{\gamma},0$
8, 2	$\overline{1},112$	91, 8

10^{γ} à 20^{γ}

x	log tg x = — log cotg x	
$10^{\gamma},0$	$\overline{1},200$*	$90^{\gamma},0$
10, 5	221	89, 5
$11^{\gamma},0$	$\overline{1},242$*	$89^{\gamma},0$
11, 5	262*	88, 5
$12^{\gamma},0$	$\overline{1},280$	$88^{\gamma},0$
12, 5	299*	87, 5
$13^{\gamma},0$	$\overline{1},316$	$87^{\gamma},0$
13, 5	333	86, 5
$14^{\gamma},0$	$\overline{1},349$	$86^{\gamma},0$
14, 5	365	85, 5
$15^{\gamma},0$	$\overline{1},380$	$85^{\gamma},0$
15, 5	395	84, 5
$16^{\gamma},0$	$\overline{1},410$*	$84^{\gamma},0$
16, 5	$\overline{1},423$	83, 5

20^{γ} à 50^{γ}

x	log tg x = — log cotg x	
20^{γ}	$\overline{1},512$*	80^{γ}
21	535*	79
22	556	78
23	577	77
24	598*	76
25	617	75
26	636	74
27	655*	73
28	673*	72
29	690	71
30^{γ}	$\overline{1},707$	70^{γ}
31	724*	69
32	740	68
33	756	67
34	772*	66
35	787	65
36	803*	64
37	817	63
38	832	62
39	$\overline{1},847$*	61

y	$-\log \operatorname{tg} y = \log \operatorname{cotg} y$	y
$4^{\gamma},0$	$\overline{2},799$*	$96^{\gamma},0$
4, 1	810*	95, 9
4, 2	820*	95, 8
4, 3	830	95, 7
4, 4	840	95, 6
4, 5	850	95, 5
4, 6	860*	95, 4
4, 7	869	95, 3
4, 8	878	95, 2
4, 9	887	96, 1
$5^{\gamma},0$	$\overline{2},896$*	$95^{\gamma},0$
	← 95^{γ} à 98^{γ}	

y	$-\log \operatorname{tg} y = \log \operatorname{cotg} y$	y
8, 4	$\overline{1},123$*	91, 6
8, 6	133	91, 4
8, 8	143	91, 2
$9^{\gamma},0$	$\overline{1},153$	$91^{\gamma},0$
9, 2	163*	90, 8
9, 4	172.	90, 6
9, 6	182*	90, 4
9, 8	191*	90, 2
$10^{\gamma},0$	$\overline{1},200$*	$90^{\gamma},0$
	← 90^{γ} à 98^{γ}	

y	$-\log \operatorname{tg} y = \log \operatorname{cotg} y$	y
$17^{\gamma},0$	$\overline{1},437$	$83^{\gamma},0$
17, 5	450	82, 5
$18^{\gamma},0$	$\overline{1},463$	$82^{\gamma},0$
18, 5	476*	81, 5
$19^{\gamma},0$	$\overline{1},488$	$81^{\gamma},0$
19, 5	500	80, 5
20^{γ}	$\overline{1},512$*	80^{γ}
	← 80^{γ} à 90^{γ}	

y	$-\log \operatorname{tg} y = \log \operatorname{cotg} y$	y
40^{γ}	$\overline{1},861$	60^{γ}
41	876*	59
42	890*	58
43	904*	57
44	918*	56
45	931	55
46	945	54
47	959	53
48	973*	52
49	986	51
50^{γ}	0,000	50^{γ}
	← 50^{γ} à 80^{γ}	

Arcs supérieurs à 100^{γ}

$x = k \cdot 100^{\gamma} + \alpha \qquad (\alpha < 100^{\gamma})$

k = multiple de 4 +	0	1	2	3
$\sin x =$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$
$\cos x =$	$\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\sin \alpha$
$\operatorname{tg} x =$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{cotg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{cotg} \alpha$
$\operatorname{cotg} x =$	$\operatorname{cotg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{cotg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$

Table des parties proportionnelles

5	4	3	2	1	Dixièmes	10	20	30	40	50
1	1*	1*	0	0	2	2	4	6	8	10
1	1	1*	1*	0	3	3	6	9	12	15
2	2*	1	1*	0	4	4	8	12	16	20
2	2	1	1	0	5	5	10	15	20	25
3	2	2*	1	1*	6	6	12	18	24	30
3	3*	2	1	1*	7	7	14	21	28	35
4	3	2	2*	1*	8	8	16	24	32	40
4	4*	3*	2*	1*	9	9	18	27	36	45

Le signe * suivant la dernière décimale d'un nombre indique que cette décimale correspond à une valeur approchée *par excès*

FORMULES ET RÉSULTATS

Arithmétique et Algèbre

$$-(-a) = a \qquad -(+a) = -a$$

$$\begin{cases} + \text{ par } + \text{ donne } + \\ - \text{ par } + \text{ donne } - \\ + \text{ par } - \text{ donne } - \\ - \text{ par } - \text{ donne } + \end{cases}$$

$$m(a \pm b) = ma \pm mb$$

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$$

$$(a - b)(a^m + a^{m-1}b + a^{m-2}b^2 + \ldots + b^m) = a^{m+1} - b^{m+1}$$

$$(a^2 + b^2)(\alpha^2 + \beta^2) = (a\alpha + b\beta)^2 + (a\beta - b\alpha)^2.$$

$a^m a^n = a^{m+n}$	$\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b}$
$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = \dfrac{1}{a^{n-m}}$	$\sqrt[m]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$
$\dfrac{1}{a^m} = a^{-m}$	$\sqrt[m]{\dfrac{1}{a}} = \dfrac{1}{\sqrt[m]{a}}$
$(a^m)^n = a^{mn}$	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}.$
$a^0 = 1$	

Si $a - b$ est divisible par n : $a \equiv b \pmod{n}$

Si a est divisible par n : $a \equiv 0 \pmod{n}$

Si $A \equiv a$ et $B \equiv b \pmod{n}$: $\begin{cases} A + B \equiv a + b \pmod{n} \\ AB \equiv ab \pmod{n} \end{cases}$

a est divisible par	2	s'il est terminé par	0 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8.
»	5	»	0 ; 5.
»	4	»	00 ; 04 ; 08 ; ... 96.
»	25	»	00 ; 25 ; 50 ; 75.
»	8	»	000 ; 008 ; ... 992.
»	125	»	000 ; 125 ; ... 875.

Un nombre est divisible par 3 ou 9, si la somme de ses chiffres l'est. — Un nombre est divisible par 11, si la différence entre la somme des chiffres du rang pair et celle des chiffres du rang impair l'est.

a et *b* étant premiers entre eux, *a* divise *bc* s'il divise *c*.

$$\frac{a}{b} = \frac{ma}{mb} \qquad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \qquad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}.$$

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, on a : $ad = bc$ $\quad a = \frac{bc}{d}$

$$\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d} \qquad \frac{a}{b} = \frac{a \pm c}{b \pm d} \qquad \frac{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{c} \pm \sqrt{d}}{\sqrt{d}} \quad \text{etc...}$$

Kilomètre	$1\,000^{m}$	1^{km}
Mètre	Unité fondamentale	1^{m}
Centimètre	$0^{m},01$	1^{cm}
Millimètre	$0^{m},001$	1^{mm}
Millième de millimètre	$0^{m},000001$	1^{μ}
Hectare	$10\,000^{m^2}$	1^{ha}
Are	100^{m^2}	1^{a}
Centiare	1^{m^2}	1^{ca}
Mètre carré	1^{m^2}	1^{m^2}
Centimètre carré	$0^{m^2},0001$	1^{cm^2}
Mètre cube	1^{m^3}	1^{m^3}
Diamètre cube	$0^{m^3},001$	1^{dm^3}
Centimètre cube	$0^{m^3},000001$	1^{cm^3}
Stère	1^{m^3}	1^{s}
Hectolitre	Environ $0^{m^3},1$	1^{hl}
Litre	» $0^{m^3},001$	1^{l}
Centilitre	» $0^{m^3},00001$	1^{cl}
Tonne	$1\,000^{kg} = 1\,000\,000^{gr}$	1^{t}
Quintal	$100^{kg} = 100\,000^{gr}$	1^{q}
Kilogramme	$1\,000^{gr}$	1^{kg}
Gramme	Unité fondamentale	1^{g}
Milligramme	$0^{gr},001$	1^{mg}

Franc	1^f	1^f
Centime	$0^f,01$	1^c

Système C. G. S. { Centimètre, Gramme, Seconde.

Si e est petit :

$$\begin{cases}(1 \pm e)^3 = 1 \pm 3e \\ (1 \pm e)^2 = 1 \pm 2e\end{cases} \qquad \begin{cases}\dfrac{1}{1 \pm e} = 1 \mp e \\ \sqrt{1 \pm e} = 1 \pm \dfrac{e}{2}\end{cases}$$

$$\sin e = \operatorname{tg} e = e \qquad \cos e = 1.$$

$A = B$ équivaut à $A - B = 0$
ou (si $m \neq 0$) à $m(A - B) = 0$

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \\ C = 0 \end{cases} \text{ équivaut à } (m \neq 0) \begin{cases} pA + qB + mC = 0 \\ A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$$

$A = B$ équivaut à $\sqrt{A} = \sqrt{B}$
ou à $\sqrt{A} = -\sqrt{B}$

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \text{ équivaut à } (ab' - ba' \neq 0) \begin{cases} x = \dfrac{cb' - bc'}{ab' - ba'} \\ y = \dfrac{ac' - ca'}{ab' - ba'} \end{cases}$$

$ax^2 + bx + c = 0$ a comme racines : $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
si $b^2 - 4ac > 0$. Si $b^2 - 4ac = 0$, on a : $x = -\dfrac{b}{2a}$.

x' et x'' étant les racines de $f(x) \equiv ax^2 + bx + c = 0$, on a :

$$f(x) \equiv a(x - x')(x - x'')$$

$$x' + x'' = -\frac{b}{a} \qquad x'x'' = \frac{c}{a}$$

$f(\alpha)$ est du signe de a, si α est extérieur à l'intervalle : x', x'', sinon, du signe de $-a$.

$x^2 + px + q = 0$ a comme racines, si $p^2 - 4q > 0$:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Dans une progression arithmétique de n termes, dont le premier est a et la raison r, le dernier est : $l = a + (n - 1)r$ et la somme : $S = \frac{(a+l)n}{2}$. — Si l'on insère p moyens dans chaque intervalle, la nouvelle progression a comme raison $\frac{r}{p+1}$.

Dans une progression géométrique de n termes, dont le premier est a et la raison q, le dernier est : $l = aq^{n-1}$ et la somme : $S = a\,\frac{1-q^n}{1-q}$. Si $q < 1$, elle a comme limite quand n augmente indéfiniment : $S = \frac{a}{1-q}$. — Si l'on insère p moyens dans chaque intervalle la nouvelle progression a pour raison $\sqrt[p+1]{q}$

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots\ldots\ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 2.$$

$$\log ab = \log a + \log b \qquad \log \frac{a}{b} = \log a + \operatorname{colog} b$$

$$\log a^n = n \log a \qquad \log a^{-n} = n \operatorname{colog} a$$

$$\log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log a \qquad \log \frac{1}{\sqrt[n]{a}} = \frac{1}{n} \operatorname{colog} a.$$

La partie entière du logarithme est $n - 1$, s'il y a n chiffres avant la virgule du nombre ; elle est $-n$ s'il y a n zéros avant le premier chiffre significatif. Le logarithme d'un nombre ajouté à son cologarithme donne -1 comme somme des parties entières et 1 comme somme des parties décimales.

Intérêts composés : $A = a(1 + r)^n$.

$y = ax + b$	ligne droite	$y = \frac{1}{x}$	hyperboles équilatères.
$y = x^2$	paraboles	$y = \frac{a}{x}$	
$y = ax^2$		$xy = a$	
$y = ax^2 + bx + c$		$(x - \alpha)(y - \beta) = a$	
$x^2 + y^2 = a^2$	cercle		

$d = \sqrt{x^2 + y^2}$ est la distance du point x, y à l'origine. $\frac{y}{x}$ est le coefficient angulaire, ou pente, de la droite qui le joint à l'origine.

Si $y=f(x)$ est l'équation d'une courbe, la dérivée $y'=f'(x)$ est en un point donné le coefficient angulaire de la tangente. Si y' est positif la fonction est croissante ; si y' est négatif elle est décroissante ; si $y'=0$, la tangente est parallèle à ox.

$y=x$	$y'=1.$
$y=ax+b$	$y'=a$
$y=x^2$	$y'=2x$
$y=ax^2+bx+c$	$y'=2ax+b$
$y=\sin x$	$y'=\cos x$
$y=\cos x$	$y'=-\sin x$
$y=\operatorname{tg} x$	$y'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$
$y=u+v$	$y'=u'+v'$
$y=au+bv$	$y'=au'+bc'$
$y=uv$	$y'=uv'+vu'$
$y=\dfrac{u}{v}$	$y'=\dfrac{vu'-uv'}{v^2}$
$y+\dfrac{1}{v}$	$y'=\dfrac{-v'}{v^2}.$

Trigonométrie

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1$$

$$\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x} \qquad \operatorname{cotg} x=\frac{1}{\operatorname{tg} x}=\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\sin(\pi-x)=\sin x\\ \cos(\pi-x)=-\cos x\\ \operatorname{tg}(\pi-x)=-\operatorname{tg} x\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l}\sin(-x)=-\sin x\\ \cos(-x)=\cos x\\ \operatorname{tg}(-x)=-\operatorname{tg} x\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l}\sin(\pi-x)=-\sin x\\ \cos(\pi-x)=-\cos x\\ \operatorname{tg}(\pi-x)=\operatorname{tg} x\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}\sin(2k\pi+x)=\sin x\\ \cos(2k\pi+x)=\cos x\\ \operatorname{tg}(2k\pi+x)=\operatorname{tg} x\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l}\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x\\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x\\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\operatorname{cotg} x=\frac{1}{\operatorname{tg} x}.\end{array}\right.$$

$$\begin{cases} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \\ \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \\ \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y \\ \sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \\ \sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y \\ \operatorname{tg}(x + y) = \dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} \\ \operatorname{tg}(x + y) = \dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 \cos x \cos y = \cos(x + y) + \cos(x - y) \\ 2 \sin x \sin y = \cos(x - y) - \cos(x + y) \\ 2 \sin x \cos y = \sin(x + y) + \sin(x - y) \\ 2 \cos x \sin y = \sin(x + y) - \sin(x - y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p + q}{2} \cos \frac{p - q}{2} \\ \cos p + \cos q = -2 \sin \frac{p + q}{2} \sin \frac{p - q}{2} \\ \sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p + q}{2} \cos \frac{p - q}{2} \\ \sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p - q}{2} \cos \frac{p + q}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x \\ \sin 2x = 2 \sin x \cos x \\ \operatorname{tg} 2x = \dfrac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \end{cases}$$

En posant $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$:

$$\begin{cases} \cos x = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2} \\ \sin x = \dfrac{2t}{1 + t^2} \\ \operatorname{tg} x = \dfrac{2t}{t - t^2} \end{cases}$$

Si un triangle est rectangle, l'angle droit étant en A, on a :

$$\left\{\begin{array}{l} b = a \sin B \\ c = a \cos B \\ b = c \operatorname{tg} B \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} c = a \sin C \\ b = a \cos C \\ c = b \operatorname{tg} C \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} B + C = 100^{\gamma} \\ S = \frac{1}{2} bc \end{array}$$

Données : b et c

$$\left\{\begin{array}{l} \operatorname{tg} B = \frac{b}{c} \\ C = 100^{\gamma} - B \\ a = \frac{b}{\sin B} \end{array}\right.$$

Données : b et a

$$\left\{\begin{array}{l} \sin B = \frac{b}{a} \\ C = 100^{\gamma} - B \\ c = a \cos B \end{array}\right.$$

Données : b et B

$$\left\{\begin{array}{l} C = 100^{\gamma} - B \\ a = \frac{b}{\sin B} \\ c = \frac{b}{\operatorname{tg} B} \end{array}\right.$$

Données : a et B

$$\left\{\begin{array}{l} C = 100^{\gamma} - B \\ b = a \sin B \\ c = a \cos B \end{array}\right.$$

Dans un triangle de côtés a, b, c, et d'angles A, B, C, on a .

$$A + B + C = 200^{\gamma} \qquad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\left\{\begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 - 2\, bc \cos A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2\, ac \cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2\, ab \cos C \end{array}\right.$$

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = pr$$

Données : a, B, C

$$\left\{\begin{array}{l} A = 200^{\gamma} - B - C \\ b = a \frac{\sin B}{\sin A} \\ c = a \frac{\sin C}{\sin A}. \end{array}\right.$$

Données : b, c, A

$$\left\{\begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{B - C}{2} = \frac{b - c}{b + c} \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{A}{2}} \\ B + C = 200^{\gamma} - A \\ a = b \frac{\sin B}{\sin A}. \end{array}\right.$$

Données : a, b, A

$$\begin{cases} \sin B = \dfrac{b \sin A}{a} \\ C = 200^\gamma - A - B \\ a = \dfrac{a \,.\, \sin B}{\sin A}. \end{cases}$$

Données : a, b, c

$$\begin{cases} r = \sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} \\ \operatorname{tg} \dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}. \end{cases}$$

Dans un trièdre, de faces a, b, c et de dièdres A, B, C, on a :

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

GÉOMÉTRIE

Si une droite est perpendiculaire sur deux droites d'un plan, non parallèles, elle est perpendiculaire à ce plan. — En un point d'une droite ou d'une courbe, il y a une infinité de normales et un seul plan normal. — En un point d'un plan ou d'une surface, il y a une infinité de plans normaux et une seule normale.

Deux triangles sont égaux si : 1° $a = a'$; $B = B'$; $C = C'$; 2° $b = b'$; $c = c'$; $A = A'$; 3° $a = a'$; $b = b'$; $c = c'$. — On a les mêmes cas pour les trièdres et en plus les cas ou les trois dièdres sont égaux : $A = A'$; $B = B'$; $C = C'$. — Deux triangles rectangles sont égaux ($A = A' =$ 1 droit) si : 1° $B = B'$ (ou $C = C'$) et $a = a'$ (ou $b = b'$) ; 2° $b = b'$ et $a = a'$ (ou $c = c'$).

Si un triangle (ou un trièdre) a deux côtés (ou deux faces) égaux, il a aussi deux angles (ou dièdres) égaux, et réciproquement.

Deux obliques égales s'écartent également du pied de la perpendiculaire, et réciproquement.

Le plus court chemin d'un point à une droite ou à un plan est la perpendiculaire abaissée du point sur la droite ou le plan.

Dans un triangle les trois médiatrices sont concourantes ; de même les trois bissectrices, ou les trois médianes, ou les trois hauteurs.

Des parallèles équidistantes découpent sur une droite des segments égaux.

Des angles de droites ou de plans ne changent pas si l'on remplace ces droites ou plans par des droites ou plans parallèles.

Les projections des deux droites parallèles sont parallèles.

Si un polygone a 4 côtés, la somme de ses angles est $2n - 4$ droites. — Pour le triangle, on a 2 droits et pour le quadrilatère 4 droits.

Dans un parallélogramme les côtés opposés sont deux à deux égaux et parallèles et les diagonales se coupent en leur milieu. — Ces diagonales sont égales dans le cas des rectangles et rectangulaires dans celui des losanges.

En un point d'une circonférence, la tangente est perpendiculaire au rayon. — En un point d'une sphère, le plan tangent est perpendiculaire au rayon.

L'angle au centre a même mesure que l'arc qu'il intercepte sur la circonférence. — L'angle inscrit a même mesure que la moitié de l'arc qu'il intercepte sur la circonférence. — Si un quadrilatère est inscriptible, les angles opposés sont supplémentaires. — Dans un triangle rectangle, la médiane du sommet de l'angle droit est la moitié de l'hypothénuse. — Un angle inscrit dans une demi-circonférence est droit.

Si 3 points A, B, C sont la ligne droite on a $\begin{cases} \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0 \\ \overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB}. \end{cases}$

Si deux couples de points A, B et C, D forment division harmonique : $\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$.

Des parallèles découpent sur deux sécantes des segments proportionnels.

Dans deux figures homothétiques, ou semblables, les longueurs homologues sont dans un rapport constant et les angles homologues sont égaux. — Deux triangles semblables ont les angles égaux et les côtés proportionnels.

Dans un triangle rectangle : 1° un côté de l'angle droit est proportionnel entre l'hypoténuse entière et sa projection sur l'hypoténuse ; 2° la hauteur est moyenne proportionnelle entre les deux segments quelle découpe sur l'hypoténuse ; 3° le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés (Théorème de Pythagore).

Polygone régulier: c côté ; a apothème ; R rayon du cercle circonscrit

Triangle équilatéral:
$$R = c\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad a = c\frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{R}{2} \qquad c = R\sqrt{3}.$$

Hexagone:
$$R = c \qquad a = c\frac{\sqrt{3}}{2} = R\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad c = R.$$

Dodécagone:
$$R = c\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \qquad a = c\frac{2+\sqrt{3}}{2} = R\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \qquad c = R\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}.$$

Carré:
$$R = c\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad a = \frac{c}{2} = R\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad c = R\sqrt{2}.$$

Octogone:
$$R = c\frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{2} \qquad a = c\frac{1+\sqrt{2}}{2} = R\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \qquad c = R\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Longueur de la circonférence : $C = 2\pi R$.

Aires

Rectangle	Bh
Parallélogramme	Bh
Triangle	$\frac{B.h}{2} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
Trapèze	$\frac{(B+b)h}{2}$
Cercle	πR^2

Volumes

Parallélipipède	Bh
Prisme	Bh
Pyramide	$\frac{Bh}{3}$
Tronc de prisme	$\frac{B(h+h'+h'')}{3}$
Tronc de pyramide	$\frac{(B+b+\sqrt{Bb})h}{3}$

Aires		*Volumes*	
Cône	$\pi R l$	Cône	$\frac{\pi R^2 h}{3}$
Cylindre	$2\pi R h$	Cylindre	$\pi R^2 h$
Sphère	$4\pi R^2$	Sphère	$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{6}\pi D^3$
Zone	$2\pi R h$	Formule des 3 niveaux	$\frac{(B + b + 4\beta) h}{6}$
Calotte	πr^2	Tonneaux	$\frac{5}{8} L^3$.

Formule de Tchebitcheff : $2a$ étant la largeur de la bande on fait le produit de cette largeur par la moyenne des 6 ordonnées des points, dont les abscisses sont $\pm 0{,}866a$; $\pm 0{,}422a$; $\pm 0{,}267a$. — Formule de Simpson : on partage l'aire en un nombre pair de bandes par des parallèles d'écartement h. L'aire est $\frac{2h}{3}(2I + P)$ en appelant I la somme des ordonnées de rang impair et P celle des ordonnées de rang pair.

Cinématique

Mouvement uniforme : $e = vt$ ou : $e = vt + e_0$.

Mouvement de rotation uniforme de vitesse angulaire ω. La vitesse est : $v = \omega R$; la période est : $\theta = \frac{2\pi}{\omega}$ et la fréquence : $n = \frac{1}{\theta} = \frac{2\pi}{\omega}$.

Mouvement varié : $e = f(t)$ avec : $v = f'(t)$.

Mouvement uniformément varié :

$$\begin{cases} v = gt = \sqrt{2ge} \\ e = \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} v = gt + v_0 \\ e = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + e_0. \end{cases}$$

Pour la pesanteur : $g = 9^{m},81$.

Mouvement oscillatoire : $e = R \sin \omega t$. La période est $\theta = \frac{2\pi}{\omega}$ et la fréquence $n = \frac{1}{\theta} = \frac{\omega}{2\pi}$. — Dans le cas du pendule : $t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

INDEX ALPHABÉTIQUE (1)

---

(1) **Les numéros indiqués se rapportent aux paragraphes et non aux pages.**

TABLE DES MATIÈRES

ALGÈBRE

Saint-Amand (Cher). — Imprimerie Bussière.